3 Integrationstechniken

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus dem vorherigen Abschnitt erlaubt es die Produkt- und Kettenregel aus der Differentialrechnung in sehr nützliche Intgegrationstechniken zu übertragen. Wir beginnen diesen relativ kurzen Abschnitt mit der Substitutionsregel. Im gesamten Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Inervall und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

3.1 Satz. (Substitutionsregel). *Es seien $f \in C(I)$ und $\varphi \in C^1[a,b]$ mit $\varphi([a,b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz besitzt f eine Stammfunktion $F \in C^1(I)$. Die Kettenregel impliziert, dass $F \circ \varphi \in C^1[a,b]$ und dass

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [a,b]$$

gilt. Deshalb ist

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)\big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F\big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□

3.2 Beispiele. a) Für $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \cos(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \cos u du = \frac{1}{\alpha}\sin\big|_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} = \frac{1}{\alpha}(\sin(\alpha b+\beta) - \sin(\alpha a+\beta)).$$

b) Es gilt

$$\int_0^1 x^{n-1}\sin(x^n)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \sin u du = -\frac{\cos u}{n}\Big|_0^1 = \frac{1}{n}(1-\cos 1).$$

3.3 Satz. (Partielle Integration). *Für Funktionen $f, g \in C^1[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b fg'dx = fg\big|_a^b - \int_a^b f'gdx.$$

Der Beweis ist einfach. Nach der Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$ und somit ist

$$\int_a^b (fg)'dx = \int_a^b f'gdx + \int fg'dx.$$

3.4 Beispiele. a) Es gilt

$$\int_a^b xe^x dx = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b e^x dx = be^b - ae^a - [e^b - e^a].$$

b) Wir bestimmen eine Rekursionsformel für $I_n = \int \sin^n x dx$ für $n \geq 2$ wie folgt: Es gilt

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx = -\cos x \sin^{n-1}(x) + \int \cos x (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

und somit

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x,$$

wobei $I_0 = \int \sin^0 x = \int 1 dx = x$ und $I_1 = \int \sin x = -\cos x$ gilt.
c) *Wallissches Produkt*: (vgl. Übungsaufgaben). Es gilt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2 - 1}.$$

Zum Beweis betrachte $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

3.5 Beispiel. Fläche des Einheitskreises.

Betrachte die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Setzt man $A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}$ und substituiert $x = \cos t$, so folgt via partieller Integration

$$\begin{aligned} A &= \int_\pi^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = \int_0^\pi \sin^2 t dt = -\sin t \cos t\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 t dt \\ &= \int_0^\pi (1 - \sin^2 t) dt = \pi - \int_0^\pi \sin^2 t dt, \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fläche des Einheitskreises beträgt somit $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

3.6 Satz. (π ist irrational). *Die Zahl π^2 und somit auch π ist irrational.*