2 Das Integral und seine Eigenschaften

In diesem Abschnitt seien wiederum $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = [a, b]$. Wir betrachten die folgende Situation: gegeben sei eine sprungstetige Funktion $f \in \mathcal{S}[a, b]$, die durch eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$ von Treppenfunktionen, wie in Theorem 1.6 beschrieben, gleichmäßig approximiert wird, d.h. es gilt $\|f - \varphi_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Setzt man $I_n := \int_a^b \varphi_n$, so gilt

$$|I_n - I_m| \overset{1.5b)}{\leq} (b-a)\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \leq (b-a)(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_m\|_\infty) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und somit konvergent. Es sei ferner $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\|\psi_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Betrachtet man die Folge $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots =: (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so gilt $\|f - g_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also konvergiert die Folge $(\int_a^b g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Teilfolgen $(\int_a^b \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\int_a^b \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen denselben Limes. Diese Überlegungen zeigen, dass folgendes Resultat gilt.

2.1 Theorem und Definition. *Es seien $f \in \mathcal{S}[a, b]$ und $\varphi_n \in \mathcal{T}[a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann existiert*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl von φ_n und heißt das Integral von f auf $[a, b]$.

Im Folgenden verwenden wir auch die Bezeichnungen $\int f$, $\int_I f$ oder $\int f dx$ für das Integral einer sprungstetigen Funktion f. Da stetige und monotone Funktionen sprungstetig sind, ist das folgende Korollar unmittelbar klar.

2.2 Korollar. *Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert für jede stetige und jede monotone Funktion f auf $[a, b]$.*

Auf der anderen Seite bemerken wir, dass nicht jede Funktion auf $[a, b]$ integrierbar ist. Ein Gegenbeispiel ist die uns schon aus Kapitel III bekannte Variante der Dirichletschen Sprungfunktion. Genauer gesagt, existiert das Integral für die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

nicht.

Diese Skizze veranschaulicht die Tatsache, dass $\int \varphi_n$ eine Approximation der orientierten Fläche „unterhalb " des Graphen von f ist.

2.3 Satz. *Es seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *und* $f, g \in \mathcal{S}[a,b]$. *Dann gilt*

a) $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ *(Linearität des Integrals).*

b) $|f| \in \mathcal{S}[a,b]$ *und*
$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f| \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

c) Gilt $f \le g$, *d.h.* $f(x) \le g(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$, *so ist*
$$\int_a^b f \le \int_a^b g, \quad \textit{(Monotonie des Integrals).}$$

Beweis. Es seien φ_n und $\psi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen derart, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren. Deshalb konvergiert $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)$ gleichmäßig gegen $\alpha f + \beta g$ und es gilt
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) \Big) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$
also die Behauptung a).
b) Da die Folge $(|\varphi_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|f|$ konvergiert und da $|f| \in \mathcal{S}[a,b]$ gilt (vgl. Theorem 1.6), folgt $\int |f| \overset{\text{Thm.2.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n|$. Somit ist
$$\Big| \int f \Big| = \Big| \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \int \varphi_n \Big| \le \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \le \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_\infty |b-a| = \|f\|_\infty (b-a).$$

c) Es seien φ_n und ψ_n reellwertige Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Dann sind auch $\varphi_n^- := \varphi_n - \|f - \varphi_n\|_\infty$ und $\psi_n^+ := \psi_n + \|g - \psi_n\|_\infty$ Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\varphi_n^- \le f \le g \le \psi_n^+$ und $(\varphi_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gleichmäßig gegen f bzw. g. Daher gilt
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^- \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n^+ = \int_a^b g.$$
□

Wir betrachten nun eine sprungstetige Funktion $f \in \mathcal{S}[a,b]$, reelle Zahlen $c, d \in [a,b]$ und setzen
$$\int_c^d f := \int_c^d f(x)dx := \begin{cases} \int_{[c,d]} f, & c < d \\ 0, & c = d \\ -\int_{[d,c]} f, & d < c \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

2.4 Lemma. (Additivität des Integrals). *Es seien* $f \in \mathcal{S}[a,b]$ *und* $c \in [a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Beweis. Es sei $a \le c \le b$. Dann ist die Aussage offensichtlich richtig für alle Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}[a,b]$. Wir betrachten deshalb eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a,b]$, welche gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Dann ist $\varphi_n|_J \in \mathcal{T}(J)$ und $(\varphi_n|_J)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_J$ für jedes kompakte Teilintervall J von $[a,b]$. Da $\int_a^b \varphi_n = \int_a^c \varphi_n + \int_c^b \varphi_n$ gilt, folgt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

□

2.5 Lemma. *Es sei* $f \in \mathcal{S}[a,b]$ *eine sprungstetige Funktion mit* $f(x) \ge 0$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Ist* f *stetig in* $c \in [a,b]$ *und gilt* $f(c) > 0$, *so ist* $\int_a^b f > 0$.

Beweis. Es sei $a < c < b$. Da f nach Voraussetzung in c stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $[c-\delta, c+\delta] \subset [a,b]$ und

$$f(x) \ge \frac{1}{2} f(c), \qquad \text{für alle } x \in [c-\delta, c+\delta].$$

Da $f \ge 0$ ist, impliziert die Monotonie des Integrals, Satz 2.3 c), dass $\int_a^{c-\delta} f \ge 0$ sowie $\int_{c+\delta}^b f \ge 0$ gilt. Deswegen ist

$$\int_a^b f \overset{2.4}{=} \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \int_{c+\delta}^b f \ge \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \ge \frac{1}{2} f(c) \int_{c-\delta}^{c+\delta} 1 = \delta f(c) > 0.$$

Der Beweis für die Fälle $c = a$ und $c = b$ verläuft analog.

□

2.6 Satz. (Mittelwertsatz für das Integral). *Es seien* f *und* $\varphi \in C([a,b])$ *mit* $\varphi \ge 0$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Beweis. Ist $\varphi \equiv 0$, so ist nichts zu beweisen. Es gelte also $\varphi(x) > 0$ für ein $x \in [a, b]$. Nach Lemma 2.5 gilt $\int_a^b \varphi > 0$. Setzen wir

$$m := \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad M := \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

so ist $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$ und die Monotonie sowie die Linearität des Integrals implizieren $m \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq M \int_a^b \varphi$. Es gilt also

$$m \leq \frac{\int_a^b f\varphi}{\int_a^b \varphi} \leq M,$$

und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\frac{\int_a^b f\varphi}{\int_a^b \varphi} = f(\xi),$$

und somit folgt die Behauptung.

□

Betrachtet man insbesondere in obigem Satz den Fall $\varphi \equiv 1$, so ist das folgende Korollar offensichtlich.

2.7 Korollar. *Es sei $f \in C[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Wir betrachten nun für $f \in \mathcal{S}[a, b]$ die Abbildung

$$F : [a, b] \to \mathbb{K}, \; F(x) := \int_a^x f(s)ds.$$

Dann gilt aufgrund der Additivität des Integrals

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(s)ds - \int_a^y f(s)ds = \int_y^x f(s)ds, \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

Der Satz 2.3 b) impliziert unmittelbar die Abschätzung

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

2.8 Theorem. (Differenzierbarkeit des Integrals nach der oberen Grenze). *Es sei* $f \in \mathcal{S}[a,b]$ *stetig in einem Punkt* $c \in [a,b]$ *und* $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ *sei definiert durch*

$$F(x) := \int_a^x f(s)ds.$$

Dann ist F *in* c *differenzierbar und es gilt* $F'(c) = f(c)$.

Beweis. Es sei $h > 0$ derart, dass $c + h < b$. Dann gilt

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(s)ds - \int_a^c f(s)ds\right) \overset{\text{Add.}}{=} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(s)ds.$$

Da $\int_c^{c+h} f(c)ds = f(c)h$, gilt

$$\frac{F(c+h) - F(c) - f(c)h}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h}(f(s) - f(c))ds,$$

und somit

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c) - f(c)h}{h}\right| \le \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(s) - f(c)|ds \le \sup_{s \in [c,c+h]} |f(s) - f(c)| \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

da f stetig in c ist. Also ist F in c differenzierbar und es gilt $F'(c) = f(c)$.

□

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen in folgendem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zusammen.

2.9 Theorem. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *eine stetige Funktion und für* $c \in [a,b]$ *setze*

$$F(x) := \int_c^x f(s)ds, \quad x \in [a,b].$$

Dann gilt:

a) F *ist differenzierbar für alle* $x \in [a,b]$ *und es gilt* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$.

b) Ist $\phi : [a,b] \to \mathbb{K}$ *eine differenzierbare Funktion mit* $\phi'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$, *so gilt*

$$\phi(x) = \phi(y) + \int_y^x f(s)ds, \quad x, y \in [a,b].$$

Beweis. Die Aussage a) folgt direkt aus Theorem 2.8. Um die Aussage b) zu beweisen, seien F und ϕ wie vorausgesetzt. Dann gilt $(F-\phi)'=0$, also $F=\phi+\alpha$ für eine Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$. Daher ist

$$\int_y^x f(s)ds = F(x)-F(y) = \phi(x)+\alpha-\phi(y)-\alpha = \phi(x)-\phi(y).$$

□

2.10 Definition.
Es sei $f \in \mathcal{S}[a,b]$. Eine differenzierbare Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{K}$ mit $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in[a,b]$ heißt *Stammfunktion von f* .

Der obige Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert das folgende Korollar.

2.11 Korollar. *Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ besitzt eine Stammfunktion F und es gilt:*

$$\int_y^x f(s)ds = F(x)-F(y) =: F\Big|_y^x, \quad x,y\in[a,b].$$

Das obige Korollar garantiert also die Existenz einer Stammfunktion für stetige Funktionen. Wir bemerken jedoch, dass in den meisten Fällen eine explizite Angabe einer Stammfunktion nicht möglich ist.

2.12 Beispiele. a) In der folgenden Tabelle sammeln wir Beispiele von Funktionen f, für welche man die Stammfunktion F explizit angeben kann.

$f(x)$	$F(x)$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$, $a\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

b) Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, so gilt

$$\int \frac{f'}{f} = \log|f|.$$

In Analogie zum vorherigen Abschnitt betrachten wir jetzt eine Folge von sprungsstetigen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und fragen, ob f wiederum integrierbar ist. Die Antwort auf diese Frage wird im folgenden Satz gegeben.

2.13 Satz. *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}[a,b]$ eine Folge von sprungstetigen Funktionen, welche gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{S}[a,b]$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|f - f_n\|_\infty \le \varepsilon/2$ gilt und zu f_n eine Treppenfunktion φ mit $\|f_n - \varphi\|_\infty \le \varepsilon/2$. Dann gilt $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$ und somit ist $f \in \mathcal{S}[a,b]$. Ferner gilt

$$\Big| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \Big| \le \|f - f_n\|(b-a) \le \varepsilon(b-a),$$

und somit die Behauptung.

□

2.14 Bemerkung. Der obige Satz 2.13 erlaubt es, einen einfachen und eleganten Beweis von Theorem IV.4.7 zu geben. Zunächst ist die Grenzfunktion $f^* = \lim_{n\to\infty} f_n'$ der Ableitungen nach Theorem IV.4.6 stetig auf $I = [a,b]$. Für festes $a \in I$ und beliebiges $x \in I$ gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt,$$

und somit gilt nach Satz 2.13 für $n \to \infty$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^*(t)dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Differental- und Integralrechnung ist dann f differenzierbar und es gilt $f'(x) = f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Wir betrachten im Folgenden die Approximation des Integrals durch sogenannte Riemann-Summen.

2.15 Definition. Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Funktion, $Z := (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann heißt

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die *Riemann-Summe* von f bzgl. Z und Stützstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Die *Feinheit* der Zerlegung Z ist definiert durch $\max_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1})$.

Es gilt dann das folgende Theorem.

2.16 Theorem. *Es sei $f \in \mathcal{S}[a,b]$ eine sprungstetige Funktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung von $[a,b]$ der Feinheit $< \delta$ und jede Wahl der Stützstellen $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ gilt*

$$|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für Treppenfunktionen; der Approximationssatz 1.6 impliziert dann die Behauptung. Die Behauptung für Treppenfunktion beweisen wir via Induktion nach der Anzahl m der Sprungstellen von f.
a) Es sei also $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ eine Treppenfunktion und $\varepsilon > 0$. Gilt $\varphi = c$ für alle $x \in [a,b]$ und ein $c \in \mathbb{K}$, so folgt die Behauptung unmittelbar. Besitzt φ genau eine Sprungstelle, so folgt die Behauptung leicht, indem wir $\delta := \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|}$ wählen.
Für den Induktionsbeweis nehmen wir an, dass die Behauptung schon für Treppenfunktionen mit m Sprungstellen bewiesen sei und betrachten eine Treppenfunktion φ mit $m+1$ Sprungstellen. Wir zerlegen dann φ in $\varphi = \varphi' + \varphi''$, wobei φ' eine Treppenfunktion mit m und φ'' eine Treppenfunktion mit genau einer Sprungstelle ist. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir für φ' ein $\delta'(\varepsilon/2)$ und zu φ'' ein $\delta''(\varepsilon/2)$ derart, dass die Behauptung für φ' und φ'' gilt; für $\delta = \min(\delta', \delta'')$ gilt sie dann für φ.
b) Für $f \in \mathcal{S}[a,b]$ wähle φ mit $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ und $\delta := \delta(\frac{\varepsilon}{3})$. Nach Teil a) gilt $|\sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b \varphi dx| < \frac{\varepsilon}{3}$; also folgt

$$\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f\,dx| \;&\le\; |\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1})| \\
&\quad + \underbrace{|\sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b \varphi dx|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&\quad + \underbrace{|\int_a^b \varphi dx - \int_a^b f dx|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \sum_{j=1}^{n} \|f - \varphi\|_\infty (x_j - x_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

2.17 Korollar. *Es sei $Z_1, Z_2 \dots,$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Feinheit gegen 0 konvergiert und S_n die zugehörige Riemannsche Summe für $f \in \mathcal{S}[a,b]$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f.$$

2.18 Bemerkungen. a) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Riemann-integrierbar*, falls ein $c \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\Big| c - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \Big| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $(x_0, \dots, x_n)$ mit der Feinheit $< \delta$ und jede Wahl von $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.
b) Das obige Theorem 2.16 besagt, dass jede sprungstetige Funktion $f \in \mathcal{S}[a,b]$ Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral mit unserem Integral übereinstimmt.
c) Es existieren Riemann-integrierbare Funktionen, welche nicht sprungstetig sind.

Das obige Korollar 2.17 erlaubt es in vielen Fällen Aussagen über Summen auf Integrale zu übertragen. Als Beispiel betrachten wir die Höldersche Ungleichung für Integrale. Hierzu setzten wir für $f \in \mathcal{S}[a,b]$ und $1 < p < \infty$

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f(x) dx|^p \Big)^{1/p}.$$

Dann gilt die folgende Ungleichung.

2.19 Korollar. *Für $f, g \in \mathcal{S}[a,b]$ und $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Für $p = q = 2$ ist dies die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* für Integrale. Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.