V Integralrechnung einer Variablen

Die Bestimmung von Flächen, Volumen und Kurvenlängen gehört zu den historisch gesehen, ältesten mathematischen Problemen und viele dieser Fragestellungen sind aus heutiger Sicht klassische Themen der Integrationstheorie.
So war es für ARCHIMEDES (287-212 v.Chr.) evident, dass eine krummlinig begrenzte Figur einen Flächeninhalt besitzt. Um diesen zu bestimmen, wurde dieser „von innen“ und „von außen“ durch einfachere Objekte mit bekanntem Flächeninhalt approximiert. Die systematische Untersuchung des Integralbegriffs begann erst deutlich später mit der Entdeckung des Zusammenhangs von Differentiation und Integration durch G.W. LEIBNIZ (1646-1716) und I. NEWTON (1642-1727) im 17. Jahrhundert. A.-L. CAUCHY (1789-1857) erkannte als erster in seinem berühmten Lehrbuch *Calcul infinitésimal* im Jahre 1823 die Notwendigkeit einer Definition des Integrals und einer sich darauf aufbauenden Integrationstheorie. B. RIEMANN (1826-1866) erweiterte diesen Begriff dann auf allgemeinere Funktionen. Ein andersartiger, jedoch sehr umfassender Integralbegriff wurde schließlich von H.-L. LEBESGUE im Jahe 1902 eingeführt; wir werden diesen später in der Vorlesung Analysis IV intensiv untersuchen.
Wir beschränken uns in diesem Kapitel zunächst auf das Integral für sogenannte sprungstetige Funktionen, eine weniger allgemeine Klasse von Funktionen als diejenige der Riemann-integrierbaren Funktionen. Der Vorteil dieses Zugangs liegt darin, dass wir den Integralbegriff zunächst für sogenannte Treppenfunktionen direkt erklären können und diesen dann später – via eines Approximationsprozesses – auf allgemeinere Funktionen ausdehnen können.
Wir beginnen dieses Kapitel in Abschnitt 1 mit der Einführung von Treppen- und sprungstetigen Funktionen. Der Approximationssatz für sprungstetige Funktionen durch Treppenfunktionen bildet den Hauptsatz dieses Abschnitts und die Grundlage unseres Integralbegriffs. Kapitel 2 widmet sich dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Vergleich unseres Integralbegriffs mit dem sogenannten Riemann-Integral. Danach betrachten wir in Abschnitt 3 klassische Integrationstechniken wie partielle Integration und Substitution, bevor wir im letzten Abschnitt das uneigentliche Integral untersuchen.

1 Treppen- und Sprungstetige Funktionen

In diesem Abschnitt seien immer $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und I bezeichne das abgeschlossene Intervall $I := [a, b]$. Wir beginnen mit der Definition des Begriffs einer Zerlegung des Intervalls I.

1.1 Definition. a) Man nennt $Z := (x_0, \ldots, x_n)$ eine *Zerlegung von I*, falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

gilt.
b) Eine Zerlegung $\overline{Z} := (y_0, \ldots, y_n)$ heißt *Verfeinerung von Z* , falls $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{y_0, \ldots, y_k\}$ gilt. In diesem Fall schreibt man $Z \subset \overline{Z}$.
c) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt *Treppenfunktion*, falls eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von I existiert, so dass f auf jedem Intervall (x_{j-1}, x_j) konstant ist für alle $j = 1, \ldots, n$.

d) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt *sprungstetig* auf I, falls f

i) für alle $x \in (a, b)$ einen links und rechtsseitigen Grenzwert besitzt und

ii) in a und b einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert besitzt.

1.2 Bemerkungen. a) Die Menge der Treppenfunktionen

$$\mathcal{T}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}; \varphi \text{ ist Treppenfunktion auf } [a, b]\}$$

sowie die Menge der sprungstetigen Funktionen

$$\mathcal{S}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}; \varphi \text{ ist sprungstetig auf } [a, b]\}$$

sind Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{T}[a, b]$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{S}[a, b]$.
b) Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist sprungstetig.
c) Jede monotone Funktion auf $[a, b]$ ist sprungstetig.
d) Setzen wir

$$\begin{aligned} C[a, b] &:= \{f : [a, b] \to \mathbb{K}, f \text{ ist stetig auf } [a, b]\}, \\ C^1[a, b] &:= \{f : [a, b] \to \mathbb{K}, f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [a, b]\}, \text{ sowie} \\ B[a, b] &:= \{f : [a, b] \to \mathbb{K}, f \text{ ist beschränkt auf } [a, b]\}, \end{aligned}$$

so sind $C[a,b]$, $C^1[a,b]$ und $B[a,b]$ ebenfalls Vektorräume über $\mathbb{K}$ und es gilt

$$C^1[a,b] \subset C[a,b] \subset \mathcal{S}[a,b] \subset B[a,b]$$

im Sinne von Untervektorräumen.

Wir definieren nun das Integral für Treppenfunktionen.

1.3 Definition. Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion und $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von I. Es gelte $f(x) = c_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$ und alle $j = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$\int_Z f := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})$$

das *Integral von f (bezüglich Z)* .

Wir müssen nun zunächst zeigen, dass das Integral $\int_Z f$ einer Funktion f nur von f, aber nicht von der gewählten Zerlegung Z abhängt.

1.4 Lemma. *Es seien $f \in \mathcal{T}[a,b]$ sowie Z und Z' Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt*

$$\int_Z f = \int_{Z'} f.$$

Beweis. Wir betrachten die Zerlegungen $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ und $Z' = (x_0, \ldots, x_k, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ des Intervalls I. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_Z f &= \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^k c_j (x_j - x_{j-1}) + \underbrace{c_{k+1}(x_{k+1} - x_k)}_{=c_{k+1}(x_{k-1}-y)+c_{k+1}(y-x_k)} + \sum_{j=k+2}^n c_j (x_j - x_{j-1}) = \int_{Z'} f.
\end{aligned}$$

Ist Z' eine beliebige Vefeinerung von Z, so folgt die Behauptung durch wiederholtes Anwenden des obigen Arguments. Sind Z und Z' beliebige Zerlegungen des Intervalls I, so ist $Z \cup Z'$ eine Verfeinerung von jeweils Z und Z'. Deshalb ist

$$\int_Z f = \int_{Z \cup Z'} f = \int_{Z'} f.$$

□

Das obige Lemma impliziert, dass wir nun das Integral einer Treppenfunktion als

$$\int_I f := \int_a^b f(x)dx := \int_I f\ dx := \int f := \int_Z f.$$

definieren können. Die folgenden Eigenschaften des Integrals folgen unmittelbar.

1.5 Lemma. *Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) $\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$ *(Linearität des Integrals).*

b) $|\int_I \varphi| = |\int_a^b \varphi(x)dx| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$.

c) Sind φ und ψ reellwertig mit $\varphi \leq \psi$, so gilt $\int_I \varphi \leq \int_I \psi$ (Monotonie des Integrals).

Unser Ziel ist es im Folgenden, das Integral, welches wir bisher nur für Treppenfunktionen definiert haben, so auf sprungstetige Funktionen fortzusetzen, dass die obigen Eigenschaften des Integrals erhalten bleiben. Hierzu ist der folgende Approximationssatz für sprungstetige Funktionen durch Treppenfunktionen von entscheidender Bedeutung.

1.6 Theorem. (Approximationssatz für sprungstetige Funktionen). *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ist genau dann sprungstetig auf $[a,b]$, wenn eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a,b]$ von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ existiert derart, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert, d.h. wenn $\|f - \varphi_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $f \in \mathcal{S}[a,b]$ eine sprungstetige Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren für alle $x \in I = [a,b]$ reelle Zahlen α_x und β_x mit $\alpha_x < x < \beta_x$ und

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}, \quad s,t \in (\alpha_x, x) \cap I \text{ oder } s,t \in (x, \beta_x) \cap I.$$

Nun ist die Menge $\{(\alpha_x, \beta_x) : x \in I\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a,b]$. Es existiert daher eine endliche Teilüberdeckung von I, d.h. es existieren $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ mit $I \subset \bigcup_{j=0}^m (\alpha_{x_j}, \beta_{x_j})$. Setzt man $y_0 := a$, $y_{j+1} := x_j$ für $j = 0, \ldots, m$, sowie $y_{m+2} := b$, so ist $Z_0 = (y_0, \ldots, y_{m+2})$ eine Zerlegung von I. Wir wählen nun eine Verfeinerung $Z_1 = (z_0, \ldots, z_k)$ von Z_0 mit

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}, \quad s,t \in (z_{j-1}, z_j), \quad j = 1, \ldots, k$$

und definieren die die Funktion f approximierenden Funktionen φ_n via

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (z_0, \ldots, z_k) \\ f(\frac{z_{j-1}+z_j}{2}), & x \in (z_{j-1}, z_j), j = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Dann ist φ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$ und nach Konstruktion gilt $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}$ für alle $x \in I$, d.h. es gilt $\|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$: Nach Voraussetzung ist $\varphi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ und es gilt $\|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle $x \in I$. Weiter, da φ_n eine Treppenfunktion ist, existiert für alle $x \in [a,b)$ ein $a' \in [a,x)$ mit $\varphi_n(s) = \varphi_n(t)$ für alle $s,t \in (a',x)$. Deshalb gilt

$$|f(s) - f(t)| \le |f(s) - \varphi_n(s)| + |\varphi_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{für alle } s,t \in (a',x).$$

Sei nun $(s_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset I$ eine Folge in I, welche von links gegen x konvergiert. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s_j \in (a',x)$ für alle $j \ge N$ und damit

$$|f(s_j) - f(s_k)| < \varepsilon, \quad \text{für alle } j,k \ge N.$$

Daher ist $(f(s_j))_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit $\lim_{j\to\infty} f(s_j) = r$. Ist $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge wie oben, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = r'$. Da aber $|f(s_j) - f(t_k)| < \varepsilon$ für alle $j,k > N$ ist, gilt $r = r'$, und somit existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{y\to x-0} f(y)$.
Der Beweis für den rechtsseitigen Grenzwert verläuft analog.

□

1.7 Korollar. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ist genau dann sprungstetig, wenn f dargestellt werden kann als*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \quad \textit{mit} \quad \varphi_n \in \mathcal{T}[a,b] \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_\infty < \infty \ \textit{gilt.}$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Nach obigem Theorem 1.6 können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\psi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ derart wählen, dass $\|f - \psi_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n}$ gilt. Setzen wir ferner $\varphi_1 := \psi_1$ und $\varphi_k := \psi_k - \psi_{k-1}$ für $k \ge 2$, so gilt

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)| = |f(x) - \psi_n(x)| \le \|f - \psi_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n},$$

und somit ist $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Ferner gilt

$$\|\varphi_j\|_\infty \le \underbrace{\|\psi_j - f\|_\infty}_{\le \frac{1}{2^j}} + \underbrace{\|f - \psi_{j-1}\|_\infty}_{\le \frac{1}{2^{j-1}}} = \frac{3}{2^j},$$

und somit gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_\infty < \infty$.

$\Longleftarrow$: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\psi_n := \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j$. Dann ist $\psi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\|f - \psi_n\|_\infty = \|f - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j\|_\infty = \| \sum_{j=n+1}^{\infty} \varphi_j\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\varphi_j\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also folgt die Behauptung aus Theorem 1.6

□

1.8 Korollar. *Eine sprungstetige Funktion $f \in \mathcal{S}[a,b]$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Insbesondere gilt diese Aussage für monotone Funktionen.*

Beweis. Nach obigem Korollar 1.7 können wir f darstellen als $f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$. Nach Korollar 4.11 kann f nur an denjenigen Stellen unstetig sein, an denen φ_n für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ unstetig ist. Nun ist $\varphi_n \in \mathcal{T}[a,b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion und besitzt also höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen. Damit besitzt aber f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

□