4 Konvergenz von Funktionenfolgen

In der Analysis sind Approximationsverfahren für Funktionen f durch Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit gewissenen, oft „besseren "Eigenschaften als f sie besitzt, von zentraler Bedeutung. So wird zum Beispiel unsere Konstruktion des Integrals im folgenden Kapitel wesentlich von einem solchem Approximationsverfahren oder einem solchem Grenzprozess bestimmt.
Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt auf D *punktweise konvergent*, falls für alle $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. Die Vorschrift

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definiert dann eine *Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{K}$. Es stellen sich nun natürlicherweise die folgenden Fragen:

a) Übertragen sich zentrale Eigenschaften der Funktionen f_n, wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, auf die Grenzfunktion f?

b) Lässt sich gegebenenfalls die Ableitung f' der Grenzfunktion durch die Ableitungen der Funktionen f_n berechnen?

Sind die Funktionen f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist die Grenzfunktion f in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, also genau dann wenn

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

gilt. Die Frage nach der Stetigkeit der Grenzfunktion führt uns also auf die Problematik der Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Wir zeigen im Folgenden, dass solche Grenzprozesse im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen.

4.1 Beispiele.
a) Es sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ auf D stetig, die Grenzfunktion f, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

hingegen ist unstetig im Punkt $x = 1$.
b) Es sei wiederum $D = [0,1]$ und $g_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Grenzfunktion ist $g \equiv 0$ mit der Ableitung $g' \equiv 0$. Andererseits gilt $g_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge $g_n'(x)$ divergiert an jeder Stelle $x \in D$.

4.2 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f_n : D \to \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent auf D gegen $f : M \to \mathbb{K}$*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M, n \geq N_0.$$

4.3 Bemerkungen. a) Eine gleichmäßig gegen f konvergente Funktionenfolge (f_n) konvergiert natürlich auch punktweise gegen f. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.
b) Setzt man

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|,$$

so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, genau dann wenn

$$\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt.
c) Für die Funktionenfolgen aus den obigen Beispielen a) und b) gilt $\|f_n - f\|_\infty = 1$ bzw. $\|g_n - g\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel a) konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$, denn ansonsten würde zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein N_0 existieren mit $x^n < \frac{1}{2}$ für alle $x \in [0,1)$ und alle $n \geq N_0$. Es ist aber $\lim_{x\to 1} x^n = 1 > \frac{1}{2}$. Widerspruch! Hingegen konvergiert (g_n) aus Beispiel b) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $g \equiv 0$, aber $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.
d) Der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz kann wie folgt beschrieben werden: betrachtet man bei *punktweiser Konvergenz* ein $x \in D$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon, x)$ so, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Die Zahl $N(\varepsilon, x)$ darf hier von x abhängen. Bei *gleichmäßiger Konvergenz* gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine universelle Zahl $N = N(\varepsilon)$ so, dass für alle $n > N(\varepsilon)$ und *alle* $x \in D$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
e) Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen 0, für $a > 0$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig auf $[a,\infty)$ gegen 0, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0 auf $[0,\infty)$.

Der folgende Satz gibt - analog zur Untersuchung bei Reihen - ein inneres Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge an, ohne die Grenzfunktion explizit kennen zu müssen.

4.4 Satz. (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz). *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f. Es existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N_0$. Somit gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n - f\| + \|f - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

$\Longleftarrow$: Die Voraussetzung impliziert, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, existiert ein eindeutiger Grenzwert welchen wir mit $f(x)$ bezeichnen. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $N(\varepsilon)$ mit $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n, m \geq N(\varepsilon)$. Daher ist

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon), x \in D,$$

und somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ und alle $x \in D$.

□

Im Folgenden beschäftigen wir uns nun im Detail mit der Eingangs gestellten Frage unter welchen Bedingungen gewisse Eigenschaften der Funktionen f_n, wie etwa Stetigkeit, Beschränktheit oder Differenzierbarkeit sich auf die Grenzfunktion f übertragen lassen. Wir beginnen mit der Eigenschaft der Beschränkheit.

4.5 Lemma. *Es seien $f_n : D \to \mathbb{K}$ beschränkte Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D gegen eine Funktion f, so ist auch f beschränkt auf D.*

Beweis. Zu $\varepsilon = 1$ existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_{N_1}(x)| < 1$ für alle $x \in D$. Nach Voraussetzung existiert weiter eine Konstante M_{N_1} mit $|f_{N_1}(x)| \leq M_{N_1}$ für alle $x \in D$. Also gilt

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{N_1}(x)|}_{<1} + \underbrace{|f_{N_1}(x)|}_{\leq M_{N_1}} \leq 1 + M_{N_1} \quad \text{für alle } x \in D.$$

□

Das folgende Resultat besagt, dass die Eigenschaft der Stetigkeit einer approximierenden Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sich auf die Grenzfunktion f überträgt, sofern die Konvergenz gleichmäßig ist.

4.6 Theorem. (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig).
Es seien $D \subset \mathbb{R}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{K}$ *stetige Funktionen für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* $f : D \to \mathbb{K}$, *so ist* f *stetig. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.*

Beweis. Es sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_{N_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$. Ferner, da f_{N_0} nach Voraussetzung stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

Deshalb gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{N_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon$$

für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap D$.

□

Das obige Beispiel 4.1 b) zeigt, dass ein zu Theorem 4.6 analoger Satz für differenzierbare Funktionen im Allgemeinen nicht gültig sein kann. Wir müssen in dieser Situation vielmehr die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen gegen eine Grenzfunktion fordern. Genauer gilt das folgende Resultat.

4.7 Theorem. *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $f_n : [a,b] \to \mathbb{K}$ *seien stetig differenzierbare Funktionen für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*
a) Die Folge $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *konvergiert für ein* $c \in [a,b]$.
b) Es existiert eine Funktion $f^* : [a,b] \to \mathbb{K}$ *derart, dass die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf* $[a,b]$ *gegen* f^* *konvergiert.*
Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig, die Grenzfunktion* f *ist differenzierbar und die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *konviergiert gleichmäßig gegen* $f' = f^*$.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte:
Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. In der Tat gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - [f_n(c) - f_m(c)]| + |f_n(c) - f_m(c)|$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a,b]$. Der Mittelwertsatz angewandt auf den ersten Term der rechten Seite liefert

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - c| + |f_n(c) - f_m(c)| \quad \text{für ein } \xi \in (a,b).$$

Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung a) und b) ein N_0 mit

$$\|f_n' - f_m'\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{fü alle } n, m \geq N_0$$

und $|f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N_0$. Deshalb ist

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Die erste Behauptung folgt nun aus dem Cauchy Kriterium 4.4.
Schritt 2: Wir setzen

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f nach Schritt 1. Nach Theorem 4.6 ist deshalb die Grenzfunktion f stetig auf $[a, b]$ und auch $f^* := \lim_{n\to\infty} f_n'$ ist stetig auf $[a, b]$.
Schritt 3: Wir zeigen, dass die Grenzfunktion f differenzierbar ist und dass $f' = f^*$ gilt.
Hierzu betrachten wir für $x_0 \in [a, b]$ die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$g(t) = f_n(x_0 + t(x - x_0)) - tf_n'(x_0)(x - x_0).$$

Nach den Mittelwertsatz gilt $g(1) - g(0) = g'(\xi)$ für ein $\xi \in (0, 1)$. Also ist

$$g(1)-g(0) = f_n(x)-f_n(x_0)-f_n'(x_0)(x-x_0) = g'(\xi) = [f_n'(x_0+\xi(x-x_0))-f_n'(x_0)](x-x_0)$$

und somit gilt

$$f(x) - f(x_0) - f^*(x_0)(x - x_0) = [f^*(x_0 + \xi(x - x_0)) - f^*(x_0)](x - x_0) =: \varphi(x)(x - x_0)$$

Nun ist f^* nach Schritt 2 stetig und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f^*(x_0) - f^*(x_0) = 0.$$

Daher ist f nach Satz 1.3 in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = f^*(x_0)$.

□

4.8 Bemerkungen.
a) Es sei $D = \mathbb{R}$ und f_n sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{nx}{2}, & -\frac{\pi}{n} \leq x \leq \frac{\pi}{n} \\ 1, & \frac{\pi}{n} < x. \end{cases}$$

Dann sind die Funktionen f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, aber die Grenzfunktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ist unstetig in $x = 0$. Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* gleichmäßig gegen f.
b) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$, denn es gilt $\sin(n^2 x) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist auch $f' \equiv 0$. Andererseits ist die Folge $(f_n')(x) = (n\cos(a^2 x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass die Voraussetzung b) in Theorem 4.7 unabdingbar ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch Kriterien für die Konvergenz von Reihen von Funktionen.

4.9 Satz. (Weierstraßsches Konvergenzkriterium). *Es sei $f_n : D \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig, d.h. die Folge der Partialsummen konvergiert gleichmäßig.*

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

Das obige Weierstraßsche Kriterium hat wichtige Anwendungen auf die Konvergenz von Potenzreihen. Inbesondere gilt die folgende Folgerung.

4.10 Korollar. *Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ konvergiert für jedes $r \in (0, \rho)$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{U_r(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.*

In der Tat wissen wir aus den uns schon bekannten Ergebnissen über Potenzreihen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergiert. Betrachtet man die Funktionen $f_n : \overline{U_r(0)} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f_n(x) := a_n x^n$, so gilt $\|f_n\|_\infty \leq |a_n| r^n$ und das Weierstraßsche Kriterium 4.9 liefert die Behauptung.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen definieren.

4.11 Korollar. *Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ definiert auf $U_\rho(0)$ eine stetige Funktion.*

4.12 Beispiele. a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn es gilt $|\frac{\cos(n\cdot x)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) Die *Riemannsche Zeta-Funktion* ζ gegeben durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha\}$ für jedes $\alpha > 1$, denn es ist $|\frac{1}{n^z}| = |\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

Schließlich untersuchen wir die Frage, ob die durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion differenzierbar ist. Hierzu zunächst ein Lemma.

4.13 Lemma. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\varrho > 0$. *Dann besitzt die formale Ableitung:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

den Konvergenzradius ϱ.

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

4.14 Satz. *Es sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$. *Dann ist* $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{K}$ *differenzierbar und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)', \quad x \in (-\varrho, \varrho),$$

d.h. Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden.

Der Beweis folgt direkt aus Korollar 4.10 und Theorem 4.7.

Für $|x| < 1$ betrachten wir das folgende Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Iteriert man die Aussage des obigen Satzes, so erhält man die folgende Verschärfung von Satz 4.14.

4.15 Korollar. *Es sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$. *Dann ist* $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{K}$ *beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$a_n = \frac{n!}{f^{(k)}(0)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Abelschen Grenzwertsatz, welchen wir ohne Beweis nur zitieren.

4.16 Satz. (Abelscher Grenzwertsatz). *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gleichmäßig für $x \in [0,1]$ *und stellt somit eine stetige Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ *dar.*

4.17 Beispiel. Wir betrachten die Reihenentwicklung der arctan-Funktion gegeben durch

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Also gilt mit dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\frac{\pi}{4} \overset{III.4}{=} \arctan(1) \overset{\text{Abel}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$