3 Der Satz von Taylor

In der bis hierher entwickelten Differentialrechnung approximierten wir eine im Punkt a differenzierbare Funktion f durch affine Funktionen, d.h. es galt die Darstellung

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$$

mit der linearen Funktion f' und einem gewissen Fehler R, für welchen $\lim_{x\to a} R(x)(x-a) = 0$ galt. Unser jetztiges Ziel besteht darin, eine gegebene Funktion f durch Polynome genauer als bisher zu approximieren. Genauer gesagt suchen wir für eine gegebene n-mal differenzierbare Funktion f ein Polynom p vom Grade kleiner oder gleich n mit

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ \ldots,\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{3.1}$$

Die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ eines solchen Polynoms $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j(x-a)^j$ errechnen sich wegen $p^{(k)}(a) = k! a_k$ zu

$$a_k = \frac{f^k(a)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Es existiert also genau ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich n, welches (3.1) erfüllt, nämlich

$$(T_n f)(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

3.1 Definition. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt $T_n f$ *n-tes Taylorpolynom* von f im *Entwicklungspunkt* a.

Die Frage wie gut sich f durch $T_n f$ approximieren lässt, hängt natürlich vom *Restglied*

$$(R_n f)(x,a) := f(x) - (T_n f)(x,a)$$

ab. Eine befriedigende Antwort hierauf liefert der folgende Satz von Taylor.

3.2 Theorem. (Satz von Taylor). *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, x \in I$ mit $a \neq x$, $k > 0$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (\min\{a,x\}, \max\{a,x\})$ so, dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{kn!}\Big(\frac{x-\xi}{x-a}\Big)^{n-k+1}(x-a)^{n+1}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen im Folgenden, dass das Restglied der Approximation durch

$$(R_nf)(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{kn!}\Big(\frac{x-\xi}{x-a}\Big)^{n-k+1}(x-a)^{n+1}$$

gegeben ist. Hierzu definieren wir Funktionen $g: J \to \mathbb{R}$ und $h: J \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j, \qquad h(t) := (x-t)^k,$$

wobei J das Intervall $J := (\min\{a,x\}, \max\{a,x\})$ bezeichnet. Es gilt dann $g'(t) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$ und $h'(t) = -k(x-t)^{k-1}$ für alle $t \in J$ und nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in J$ mit

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Ferner gilt $g(x) - g(a) = R_nf(x,a)$ sowie $h(x) - h(a) = -(x-a)^k$ und deshalb ist

$$R_nf(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{kn!}\Big(\frac{x-\xi}{x-a}\Big)^{n-k+1}(x-a)^{n+1}.$$

□

Setzt man im obigen Satz speziell $k = n+1$ oder $k = 1$, so erhalten wir die Restglieddarstellungen von Lagrange und Cauchy.

3.3 Korollar. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$R_nf(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \textit{(Lagrangesche Darstellung des Restglieds)}$$

und

$$R_nf(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\Big(\frac{x-\xi}{x-a}\Big)^{n}(x-a)^{n+1} \qquad \textit{(Cauchysche Darstellung des Restglieds).}$$

Wir betrachten im Folgenden eine beliebig oft differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Für $a \in J$ heißt

$$(Tf)(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{n\to\infty}(T_nf)(x,a)$$

die *Taylorreihe* von f in a. Es stellen sich dann natürlicherweise die folgende Fragen:

a) Konvergiert die obige Reihe und wenn ja, gegen welchen Wert?

b) Wird f in einer Umgebung von a durch seine Taylorreihe dargestellt?

Eine erste Antwort auf die Frage b) gibt der folgende Satz.

3.4 Satz. *Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x, a \in J$. Dann gilt:*

$$(Tf)(x,a) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_n f(x,a) = 0.$$

Dieser Satz folgt natürlich sofort aus dem Taylorschen Satz 3.2 und der Definition der Konvergenz einer Reihe. Auf den ersten Blick erscheint die Aussage dieses Satzes als relativ banal; es existieren jedoch Funktionen f, für welche $\lim_{n\to\infty} R_n f(x,a)$ existiert, aber der Grenzwert verschieden von 0 ist. In diesem Fall konvergiert die Taylorreihe an der Stelle x, aber *nicht* gegen den Funktionswert $f(x)$! Im folgenden Beispiel geben wir explizit eine solche Funktion an.

3.5 Beispiel. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (vgl. die Übungen). Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ aber } f(x) \neq 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Taylorreihe gegen f wird im folgenden Korollar gegeben.

3.6 Korollar. *Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x, a \in J$. Es existiere $M > 0$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \max_{\xi\in[a,x]} |f^{(n)}(\xi)| \leq M \text{ bzw. } \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \max_{\xi\in[x,a]} |f^{(n)}(\xi)| \leq M.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Der Beweis ist einfach. Da

$$|(R_n f)(x,a)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt, folgt die Behauptung aus Satz 3.4.

Wir erläutern den Satz von Taylor weiter anhand von Beispielen.

3.7 Beispiele. a) Es gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

denn die Exponentialfunktion exp ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad (T_n f)(x,0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

und ferner gilt

$$\max_{\xi \in [0,x]} |f^{(n)}(\xi)| = e^x, \quad \max_{\xi \in [x,0]} |f^{(n)}(\xi)| = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Korollar 3.6 impliziert daher die Behauptung.
b) Für $x \in (-1,1]$ gilt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Zum Beweis betrachte $f(x) := \log(1+x)$ für alle $x > -1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}, \quad \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 0, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und somit

$$T_n f(x,0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j.$$

Die Lagrangsche Restglieddarstellung für $x \in [0,1]$ lautet

$$R_n f(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}$$

für ein $\xi in (0,1)$. Somit ist $|R_n f(x,0)| \le \frac{1}{n+1} |\frac{x}{1+\xi}|^{n+1} \le \frac{1}{n+1}$, und daher

$$R_n f(x,0) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in [0,1].$$

Falls $-1 < x < 0$, so gilt nach der Cauchyschen Restglieddarstellung

$$R_n f(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (\frac{x-\xi}{x})^n x^{n+1} = \frac{n!(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1} n!} x^{n+1} (\frac{x-\xi}{x})^n$$

und somit

$$|R_n f(x,0)| = \frac{|x-\xi|^n}{|1+\xi|\,|1+\xi|^n}|x|.$$

Für $\xi \in (x,0)$ gilt $\xi - x = \xi + 1 - (x+1)$ und somit $|\frac{x-\xi}{1+\xi}| = \frac{\xi-x}{1+\xi} = 1 - \frac{1+x}{1+\xi} < 1$. Also ist

$$|R_n f(x,0)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Insbesondere gilt für $x = 1$

$$\ln(x+1) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

womit wir den Wert der alternierenden harmonischen Reihe explizit bestimmt haben.

Der Satz von Taylor liefert auch ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Bestimmung lokaler Extremwerte.

3.8 Satz. (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema). *Es seien $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in J$ und es gelte*

$$f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad \textit{sowie } f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:
a) Ist $f^{(n+1)}(a) > 0$, so hat f in a ein lokales Minimum.
b) Ist $f^{(n+1)}(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Maximum.

Beweis. Es sei $f^{(n+1)}(a) > 0$. Da nach Voraussetzung $f^{(n+1)}$ auf J stetig ist, existiert eine Umgebung $U_\delta(a) \subset J$ von a mit $f^{(n+1)}(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(a)$. Der Satz von Taylor mit der Restglieddarstellung von Lagrange impliziert, dass ein $\xi \in U_\delta(a)$ existiert mit

$$f(x) = f(a) + \frac{\overbrace{f^{(n+1)}(\xi)}^{>0}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} > f(a), \quad \text{für alle } x \in U_a,$$

also die Behauptung. Für den Fall $f^{(n+1)}(a) < 0$ verläuft der Beweis analog.

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir Nullstellen differenzierbarer Funktionen näherungsweise berechnen.

Hierzu betrachten wir zunächst eine affine Approximation von f gegeben durch $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ist $f'(x_0) \neq 0$, so setzen wir

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Gilt $x_1 \in D_f$, so verfahren wir analog weiter und setzen $x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Allgemeiner definieren wir die $(n+1)$-te Iterierte als

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dieses Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion heißt *Newton-Vefahren.*

3.9 Satz. (Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren). *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und es gelte*

a) f *besitzt in* $[a,b]$ *eine Nullstelle* ξ,

b) $f'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in [a,b]$,

c) f *ist konvex oder konkav auf* $[a,b]$,

d) Es gelte $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \in [a,b]$ *für* $x_0 = a$ *und* $x_0 = b$.

Dann konvergiert das Newton-Verfahren für jedes $x_0 \in [a,b]$ *monoton gegen* ξ *und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_k - x_{k-1}|^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $m := \min\{|f'(\tau)| : \tau \in [a,b]\}$ *und* $M := \max\{|f''(\tau)| : \tau \in [a,b]\}$ *gilt.*

Die obige Fehlerabschätzung bedeutet, dass das Newton-Verfahren eine *quadratische Konvergenzordnung* besitzt.

Beweis. Wir unterscheiden die vier Fälle $f' > 0, f'' \geq 0$, bzw. $f' < 0, f'' \geq 0$, bzw. $f' > 0, f'' \leq 0$, bzw. $f' < 0, f'' \leq 0$ und beweisen hier im Detail aber nur den ersteren. Der Beweis der anderen Fälle verläuft analog.
Definiert man eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

so erhalten wir, da f nach Voraussetzung monoton steigend ist und $f(\xi) = 0$ sowie $f'' \geq 0$ gilt,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \begin{cases} \leq 0, & x \in [a, \xi] \\ \geq 0, & x \in [\xi, b]. \end{cases}$$

Ferner ist $\varphi(\xi) = \xi$ ein Minimum von φ in $[a, b]$. Nach Voraussetzung d) ist deshalb $\varphi(x) \in [\xi, b]$ für alle $x \in [a, b]$ und es gilt $\varphi(x) \leq x$ für alle $x \in [\xi, b]$. Wir setzen nun

$$x_{k+1} := \varphi(x_k).$$

Dann gilt $x_1 \in [\xi, b]$ und $x_k \in [\xi, b]$ impliziert $\xi \leq x_{k+1} \leq x_k$. Deshalb ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge welche einen Grenzwert besitzt. Da φ stetig vorausgesetzt war, folgt $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$.
Zum Beweis der Fehlerabschätzung benutzen wir den Mittelwertsatz und erhalten

$$\left| \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \right| \geq m,$$

was wiederum $|x_k - \xi| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$ bedeutet. Wir schätzen $|f(x_k)|$ mit Hilfe des Satzes von Taylor im Entwicklungspunkt x_{k-1} anhand des Lagrangeschen Restglieds ab und erhalten

$$f(x_k) = \underbrace{f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}_{=0 \text{ nach Konstruktion}} + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x_k - x_{k-1})^2$$

für ein $\tilde{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Also gilt $|f(x_k)| \leq \frac{M}{2}(x_k - x_{k-1})^2$ und daher

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_k - x_{k-1}|^2.$$

$\square$