2 Der Mittelwertsatz und Anwendungen

Wir haben in Abschnitt III.3 gesehen, dass eine reelle, stetige Funktion f auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Miminum besitzt. Ist die Funktion f zusätzlich differenzierbar, so liefert die Ableitung eine zusätzliche Information zur Lage der Extremalstellen. Genauer gilt das unten stehende notwendige Kriterium für Extremalwerte; als Anwendung des Mittelwertsatzes stellen wir dann auch ein hierfür hinreichendes Kriterium auf.

2.1 Definition. Ist $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt $x_0 \in D$ *lokales Maximum (Minimum)* von f, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0)), \qquad \text{für alle } x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Lokale Maxima oder Minima heissen auch *lokale Extrema* einer gegebenen Funktion f; im Folgenden bestimmen wir Kriterien welche es erlauben eine gegebene Funktion nach lokalen Extremwerten zu untersuchen. Wir beginnen zunächst mit einem notwendigem Kriterium für Extremwerte.

2.2 Satz. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Es sei x_0 ein lokales Minimum von f. Dann existiert $\delta > 0$ mit

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Daher gilt einerseits $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ und andererseits $\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ und somit $f'(x_0) = 0$. Der Beweis für ein lokales Maximum verläuft analog.

□

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Umkehrung obigen Satzes im Allgemeinen nicht gilt und dass eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f ein Extremum in a oder b annehmen kann, auch wenn $f'(a) \neq 0$ oder $f'(b) \neq 0$.

Der folgende Satz von Rolle ist eine einfache Konsequenz des obigen Satzes.

2.3 Korollar. (Satz von Rolle). *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion welche in (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Ist f eine konstante Funktion, so gilt $f' = 0$ und somit die Aussage. Wir nehmen also an, dass f eine nichtkonstante Funktion sei. Nach Satz III.3.9 nimmt f

auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ sein globales Maximum $\max f$ bzw. Minimum $\min f$ an, wobei $\max f \neq f(a) = f(b)$ oder $\min f \neq f(a) = f(b)$ gilt. Es existiert also ein $\xi \in (a, b)$ welches Extremum von f ist. Nach obigem Satz 2.2 gilt somit $f'(\xi) = 0$.

□

Der folgende Mittelwertsatz ist das zentrale Theorem dieses Abschnitts. Er hat weitreichende Konsequenzen für die Analysis von Funktionen einer reellen Variablen.

2.4 Theorem. (Mittelwertsatz). *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fnktion, welche in (a, b) differenzierbar ist, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist F stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und es gilt $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle 2.3 existiert daher ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Wir bemerken an dieser Stelle, dass der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ *nicht* richtig ist. Ein Gegenbeispiel hierfür ist die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = e^{ix}$. Es gilt dann $f(0) = 1 = f(2\pi)$, aber $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ für alle $x \in [0, 2\pi]$.
Der Mittelwertsatz hat viele wichtige Konsequenzen: Einige hiervon sind im folgenden Korollar zusammengefasst.

2.5 Korollar. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche in (a, b) differenzierbar ist. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) f ist konstant $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

b)

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend in } (a, b).\\
f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist monoton fallend in } (a, b).\\
f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend in } (a, b).\\
f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend in } (a, b).
\end{aligned}$$

c) *Ist $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, so ist x_0 ein*

   i) *lokales Minimum, wenn $f' \leq 0$ in (a, x_0) und $f' \geq 0$ in (x_0, b);*

   ii) *lokales Maximum, wenn $f' \geq 0$ in (a, x_0) und $f' \leq 0$ in (x_0, b).*

d) *Ist $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad \text{für alle } x, y \in [a, b],$$

d.h. mit anderen Worten, dass f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L.

e) *Die Funktion f' besitzt die Zwischenwerteigenschaft, obwohl f' im allgemeinen nicht stetig ist. Genauer sei $f'(a) \neq f'(b)$ und $\min\{f'(a), f'(b)\} < \alpha < \max\{f'(a), f'(b)\}$, so existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \alpha$.*

Beweis. a) Ist f konstant, so ist klarerweise $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Umgekehrt, sei $x \in (a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz und der Voraussetzung existiert $\xi \in (a, x)$ mit $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0$. Also ist $f(x) = f(a)$.
b) Die Definition der Differenzierbarkeit impliziert unmittelbar, dass $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, falls f monoton steigend ist. Umgekehrt sei $a \leq x < y \leq b$. Wiederum existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{> 0} \geq 0,$$

falls $f' \geq 0$ gilt.
Die Aussagen c) d) und e) überlassen wir als Übungsaufgaben.

□

Eine weitere Folgerung aus dem Mittelwertsatz ist die folgende Charakterisierung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$.

2.6 Korollar. *Die Exponentialfunktion* exp *ist die einzige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f' = f$ und $f(0) = 1$.*

Zum Beweis betrachten wir die Funktion $g(x) := f(x)e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit ist g eine Konstante mit dem Wert $g(0) = 1$.

2.7 Satz. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, welche in (a, b) differenzierbar sind und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Zunächst gilt $g(a) \neq g(b)$, denn ansonsten würde nach dem Satz von Rolle 2.3 ein $x \in (a,b)$ existieren mit $g'(x) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Um die eigentliche Aussage des Satzes zu beweisen, definieren wir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Dann ist $F(a) = f(a) = F(b)$ und nach dem Satz von Rolle 2.3 existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

$\square$

Mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes beweisen wir auch die l'Hospitalschen Regeln. Sie gestatten es, Grenzwerte der Form $\lim_{x\to x_0} \frac{f(c)}{g(x)}$ zu bestimmen, wenn sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ für $x \to x_0$ gegen 0 oder gegen ∞ konvergieren.

2.8 Korollar. (Regeln von l'Hospital). *Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Falls*
a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ *oder*
b) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$,
gilt und $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, so existiert auch* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Das entsprechende Resultat gilt auch für $x \to b, x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage für den Fall a) und fassen f und g als stetige Funktionen in a auf, indem wir $f(a) = g(a) = 0$ setzen. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert zu jedem $x \in (a,b)$ ein $\xi \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Gilt $x \to a$, so folgt $\xi \to a$ und somit die Behauptung.
Im Fall b) setze $q := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c \in (a,b)$ mit

$$\Big|\frac{f'(x)}{g'(x)} - q\Big| \leq \varepsilon, \qquad \text{für alle } x \in (a,c).$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann für beliebige $x, y \in (a,c)$ mit $x \neq y$

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - q\Big| \leq \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, existiert ein $c' \in (a,c)$ mit

$$|\frac{g(y)}{g(x)}| \le \varepsilon \text{ und } |\frac{f(y)}{g(x)}| \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a,c').$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} |\frac{f(x)}{g(x)} - q| &= |(1 - \frac{g(y)}{g(x)})(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - q) + \frac{f(y)}{g(x)} - q\frac{g(y)}{g(x)}| \\ &\le \varepsilon(2 + |q| + \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle $x \in (a,c')$, d.h. es gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = q = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Die verbleibenden Fälle beweist man analog.

□

Die l'Hospitalschen Regeln werden oft mit Vorteil verwendet um Grenzwerte zu bestimmen.

2.9 Beispiele. Es gelten die folgenden Aussagen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \overset{2.8}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \overset{2.8}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \overset{2.8}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{2.8}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0.$

Wir betrachten nun Ableitungen höherer Ordnung. Genauer sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine differenzierbare Funktion. Ist f' auch differenzierbar, so heißt f *zweimal* differenzierbar und man nennt $f'' := (f')'$ die *zweite Ableitung* von f. Allgemeiner definiert man die *n-te Ableitung* $f^{(n)}$ rekursiv als Ableitung von $f^{(n-1)}$. Für $f^{(n)}$ schreiben wir auch $\frac{d^n f}{dx^n}$ oder $D^n f$.

2.10 Definition. Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ heißt *n-mal stetig differenzierbar*, falls f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ noch stetig ist.

Die zweiten Ableitungen einer Funktion kann man auch geometrisch interpretieren; hierzu führen wir zunächst den Begriff einer konvexen Funktion ein.

2.11 Definition. Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt f *konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in J$ und alle $\lambda \in (0,1)$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

gilt.

Den Zusammenhang zwischen konvexen Funktionen f und Eigenschaften von f' liefert der folgende Satz.

2.12 Satz. *Es sei $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann konvex, wenn f' monoton steigend ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Es seien $x, x_1, x_2 \in J$ mit $x_1 < x < x_2$. Wir wählen $\lambda \in (0,1)$ so, dass $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ gilt. Da f nach Voraussetzung konvex ist, gilt $f(x) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$. Daher ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &\leq \lambda((f(x_2) - f(x_1)) \\ f(x_2) - f(x) &\geq (1-\lambda)[f(x_2) - f(x_1)] \end{aligned}$$

und da $x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$ und $x_2 - x > (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$ gilt, ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x_1 < x < x_2.$$

Somit gilt

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

und f ist daher monoton wachsend.
$\Longleftarrow$: Der Beweis verläuft ähnlich wie oben und wird dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

□

2.13 Korollar. *Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so gilt*

$$f \text{ ist konvex } \Longleftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } (a,b).$$

2.14 Beispiel. Die Funktion $-\log$ ist konvex auf $\mathbb{R}_+$, denn es gilt $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ für alle $x > 0$. Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $-f$ konvex ist, nennt man *konkav.* Speziell ist also log eine konkave Funktion auf $\mathbb{R}_+$.

Konvexe und konkave Funktionen sind wichtige Begriffe in der Analysis und haben interessante Anwendungen. Wir betrachten hier speziell die Youngsche und die Höldersche Ungleichung. Für $p \in (1,\infty)$ nennen wir $q \in (1,\infty)$, mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

den zu p *konjugierten Index.*

2.15 Satz. (Youngsche Ungleichung). *Für* $1 < p, q < \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *gilt*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad a, b \geq 0.$$

Beweis. Es seien $a > 0$ und $b > 0$, ansonsten ist die Behauptung trivial. Da log eine konkave Funktion ist, folgt aus der Definition der Konvexität mit $\lambda = 1/p$ und $(1 - \lambda) = 1/q$, dass

$$\log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log a + \log b = \log(ab)$$

gilt. Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist, ergibt sich die Behauptung durch Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der obigen Ungleichung. □

Für einen Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und p mit $1 < p < \infty$ definieren wir

$$||x||_p := \big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

2.16 Korollar. (Höldersche Ungleichung). *Für* $1 < p, q < \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *und* $x, y \in \mathbb{K}^n$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq ||x||_p ||y||_q.$$

Wir beobachten, dass der Spezialfall $p = q = 2$ genau die aus der Linearen Algebra bekannte Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung ist.

Beweis. OBdA seien $x, y \neq 0$. Die obige Youngsche Ungleichung impliziert

$$\frac{|x_j|}{||x||_p}\frac{|y_j|}{||y||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_j|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_j|^q}{||y||_q^q}.$$

Aufsummieren liefert

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j y_j|}{||x||_p ||y||_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

also die Behauptung. □