IV Differentialrechnung einer Variablen

1 Differenzierbare Funktionen

Die auf Leibniz und Newton zurückgehende Differential- und Integralrechnung bildet den inhaltlichen Kern der Grundvorlesungen über Analysis. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Differentialrechnung von Funktionen einer reellen Variablen, lassen aber weiterhin komplexwertige Funktionen zu.

Wir beginnen mit dem Problem eine gegebene Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ durch eine affine Funktion im Punkt $x_0 \in D$ zu approximieren. Gilt speziell $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so kann man diese Fragestellung geometrisch so interpretieren, dass wir die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bestimmen wollen.

Die grundlegende Idee zur Lösung obigen Problems besteht darin, die Tangente durch die Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ für kleines h zu approximieren. Die Steigung dieser Geraden ist dann gegeben durch $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Dies motiviert die folgende Definition.

1.1 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *differenzierbar in* $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung von* f *in* x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Ist f in jedem $x \in M$ differenzierbar, so heißt f *differenzierbar* und die Abbildung $f' : M \to \mathbb{K}, x \mapsto f'(x)$ heißt die *Ableitung* von f.

1.2 Beispiele. a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x_0^{n-1} + xx_0^{n-2} + x^2x_0^{n-3} + \ldots + x^{n-1} \xrightarrow{x \to x_0} x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

gilt.
b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = e^{\alpha x}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, denn es ist

$$\frac{e^{\alpha(x_0+h)} - e^{\alpha x_0}}{h} = e^{\alpha x_0}(\frac{e^{\alpha h} - 1}{h}) \xrightarrow{h \to 0} \alpha e^{\alpha x_0},$$

analog zu Beispiel 3.15 b).

Im folgenden Satz wollen wir den Begriff der Differenzierbarkeit äquivalent umformen. Dabei setzen wir immer voraus, dass $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D ist.

1.3 Satz. *Für eine Funktion $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ und $x_0 \in M$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

i) Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar.

ii) Es existiert eine in x_0 stetige Funktion $\varphi : M \to \mathbb{K}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x), \quad x \in M.$$

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

iii) Es existiert eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{h} = 0.$$

In diesem Fall gilt $f'(x_0)h = Lh$ für alle $h \in \mathbb{R}$.

Beweis. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)*: Nach Voraussetzung besitzt die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \in M \setminus \{x_0\}$ eine in x_0 stetige Fortsetzung φ. Im Punkt x_0 gilt dann $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.
ii) $\Longrightarrow$ *iii)*: Die durch $Lh := \varphi(x_0)h = f'(x_0)h$ definierte lineare Abbildung erfüllt die in Aussage iii) geforderten Eigenschaften.
iii) $\Longrightarrow$ *i)*: Es sei L eine lineare Abbildung, welche die Aussage iii) erfüllt. Gilt $Lh = \alpha h$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$, so folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h}{h} = 0;$$

also ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \alpha$.

□

Die Aussage iii) des obigen Satzes besagt, dass für eine differenzierbare Funktion f der Zuwachs $f(x_0+h)-f(x_0)$ von f durch Lh derart gut approximiert wird, dass die Differenz $f(x_0+h)-f(x_0)-Lh$ für $h\to 0$ schneller gegen 0 konvergiert als h selbst. Diese Formulierung zielt darauf ab Funktionen lokal durch lineare Funktionen zu approximieren und wird später mit Hilfe des Satzes von Taylor noch ausgebaut. Sie ist dann auch der Ausgangspunkt für die Übertragung des Begriffs der Differenzierbarkeit auf Funktionen mehrerer Variablen.

Satz 1.3 impliziert zunächst unmittelbar, dass eine in x_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig ist.

1.4 Korollar. *Eine in $x_0\in M\subset\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f:M\to\mathbb{K}$ ist in x_0 auch stetig.*

Wir bemerken, dass die Umkehrung von Korollar 1.4 im allgemeinen *nicht* gilt. Betrachte hierzu zum Beispiel die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ im Punkt 0. Wir bemerken ferner, dass stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ existieren, welche in *keinem* Punkt differenzierbar sind.

1.5 Satz. (Rechenregeln für differenzierbare Funktionen) *Es seien $f,g:M\subset\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ in $x_0\in M$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*
a) Die Funktion $\alpha f+\beta g$ ist differenzierbar in x_0 für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ und es gilt

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$$

Die Ableitung ist also insbesondere eine lineare Abbildung.
b) (Produktregel). *Das Produnkt $f\cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

c) (Quotientenregel). *Ist $g(x_0)\neq 0$, so existiert ein $\delta>0$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{f}{g}:M\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar ist und dass*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

gilt.

Beweis. Die Aussage a) folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.
Um die Aussage b) zu beweisen, sei $h\neq 0$ und $x_0+h\in M$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+\\ &\quad \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}f(x_0)\\ &\overset{h\to 0}{\to} f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise beweisen wir die Aussage c). Genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} &= \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left[\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]g(x_0)}{h}-\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]f(x_0)}{h}\right]\\ &\overset{h\to 0}{\to} \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

□

1.6 Beispiele. a) Ein Polynom p der Form $p(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x$ ist differenzierbar mit der Ableitung $p'(x) = 15x^2 + 14x + 3$. Dies folgt aus Beispiel 1.2 a) und Satz 1.5 a).
b) Die Sinus- sowie die Cosinusfunktion sind differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\sin'(x) = \cos x, \qquad \cos'(x) = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

denn es gilt $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und Beispiel 1.2 b) und Satz 1.5 a) implizieren

$$(\sin x)' = \frac{1}{2i}(ie^{ix} + ie^{-ix}) = \cos x.$$

c) Die Ableitung der Tangensfunktion ist nach der Quotienten-Regel gegeben durch

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \overset{\text{III.4.3}}{=} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^{-n}$. Dann gilt $f'(x) = -nx^{-n-1}$, denn es ist $f = \frac{1}{h}$ für die differenzierbare Funktion $h(x) = x^n$ und nach der Quotientenregel gilt $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.7 Satz. (Kettenregel) *Es seien $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $g(D_g) \subset D_f$. Ist g in $x_0 \in D_g$ und f in $g(x_0) \in D_f$ differenzierbar, so ist $f \circ g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 1.3 existieren in x_0 bzw. in $g(x_0)$ stetige Funktionen φ_f und φ_g mit

$$\begin{aligned} f(y) - f(y_0) &= (y - y_0)\varphi_f(y), \quad y \in D_f\\ g(x) - g(x_0) &= (x - x_0)\varphi_g(x), \quad x \in D_g. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = (g(x) - g(x_0))\varphi_f(g(x)) = (x - x_0)\underbrace{\varphi_g(x)\varphi_f(g(x))}_{=:\varphi(x)}$$

mit einer in x_0 stetigen Funktion $\varphi := \varphi_g \cdot (\varphi_f \circ g)$. Der Satz 1.3 impliziert weiter, dass $f \circ g$ in x_0 differenzierbar ist, und dass

$$(f \circ g)'(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi_g(x_0)\varphi_f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

gilt.

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch die Ableitung der Umkehrfunktion einer gegebenen differenzierbaren Funktion.

1.8 Satz. (Ableitung der Umkehrfunktion). *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und g die Umkehrfunktion einer stetigen und streng monotonen Funktion $f : J \to \mathbb{R}$. Ist f in $x_0 \in J$ differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist $g : f(J) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$g'(y_0) = g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 1.3 existiert eine in x_0 stetige Funktion φ mit $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$ für alle $x \in J$. Wegen der strengen Monotonie von f und da $f'(x_0) \neq 0$ folgt $\varphi(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von x_0. Für $x = g(y)$ in dieser Umgebung gilt dann

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y)), \quad y \in f(J).$$

Daher ist $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\frac{1}{\varphi(g(y))}$, mit einer nach Kapitel III.1 in x_0 stetigen Funktion $\varphi \circ g$. Satz 1.3 impliziert wiederum, dass g in y_0 differenzierbar ist, und dass gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

□

1.9 Beispiel. Die Funktion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist nach Beispiel 1.6 c) differenzierbar und es gilt $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Also ist auch $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$