4 Die Exponentialfunktion und Verwandte

Im Zentrum dieses Abschnitts steht die Exponentialfunktion, eine der wichtigsten Funktionen der gesamten Mathematik. Mit ihrer Hilfe führen wir zum einen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus ein und untersuchen zum anderen die uns schon bekannten Logarithmus- und Potenzfunktionen auf weitere Eigenschaften.
Viele der folgenden Definitionen und Argumente gehen direkt auf LEONHARD EULER (1707-1783), einen der bedeutensten Mathematiker aller Zeiten zurück. Im Jahre 1707 in Basel geboren, immaktrikulierte er sich im Alter von 13 Jahren an der Basler Universität, wurde dort Schüler von Johann Bernoulli, um dann 1727 an die Akademie von St. Petersburg und später, genauer 1733, auf die dortige Mathematikprofessur berufen zu werden. Zu jener Zeit bildeten die Akademien das Zentrum der wissenschaftlichen Forschung und Euler verbrachte sein gesamtes Leben an den Akademien in St. Petersburg und Berlin (1741-1766). Den größten Einfluss übte Euler in der Mathematik durch seine Lehrbücher aus. Seine „*Introductio in analysin infinitorum*“ ebnete den Weg für die Analysis zu einem, neben der Geometrie und der Algebra gleichbereichtigen, Zweig der Mathematik. Unsere heutige mathematische Bezeichnungsweise geht in wesentlichen Teilen auf ihn zurück.

Bevor wir - dem Eulerschen Wege folgend - die Sinus und Cosinusreihe als Potenzreihe definieren, erinnern wir zunächst noch einmal an die uns aus Kapitel II wohlbekannte Exponentialreihe

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots, \qquad z \in \mathbb{C},$$

deren Konvergenzradius unendlich ist. Die im Folgenden genauer untersuchten Sinus- und Cosinusreihen weisen eine enge Verwandschaft mit der Exponentialreihe auf. Es ist dabei wesentlich im Komplexen zu arbeiten; erst hier wird die innere Beziehung all dieser Funktionen deutlich. Rückwirkend werden wir durch die trigonometrischen Funktionen auch neue Erkenntnisse über die Exponentialfunktion gewinnen, zum Beispiel, dass sie eine komplexe Periode besitzt.

4.1 Definition. Die *Sinusreihe* $\sin z$ bzw. die *Cosinusreihe* $\cos z$ ist definiert als

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die so definierten Sinus- und Cosinusreihen besitzen die folgenden elementaren Eigenschaften.

4.2 Satz. *a) Der Konvergenzradius der Sinus- und Cosinusreihe ist unendlich.*
b) Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

c) Die Funktionen $z \mapsto \sin z$ *und* $z \mapsto \cos z$ *sind stetige Funktionen auf* $\mathbb{C}$.

Die Aussage über den Konvergenzradius folgt aus der Cauchy-Hadamardschen Formel II.5.2. Ferner ist die Eulersche Formel eine unmittelbare Konsequenz der Darstellung

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Stetigkeit der Funktionen $z \mapsto \sin z$ und $z \mapsto \cos z$ folgt aus Satz 1.7.

Weitere Eigenschaften der Cosinus- bzw. Sinusreihe lassen sich ebenso direkt aus der Definition herleiten.

4.3 Korollar. *a) Die Cosinusfunktion* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \cos z$ *ist eine gerade, die Sinusfunktion* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin z$ *eine ungerade Funktion, d.h. es gilt*

$$\cos z = \cos(-z) \text{ und } \sin z = -\sin(-z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ und } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

c) Für $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ *und* $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.
d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $|e^{ix}| = 1$.

Wie die Exponentialfunktion besitzen auch die Sinus- und Cosinusfunktionen gewisse Additionstheoreme.

4.4 Satz. (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus). *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gelten die folgenden Aussagen:*

$$\begin{aligned}
\cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w, \\
\sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w, \\
\sin z - \sin w &= 2 \cos(\frac{z+w}{2}) \sin(\frac{z-w}{2}), \\
\cos z - \cos w &= -2 \sin(\frac{z+w}{2}) \sin(\frac{z-w}{2}).
\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt nach Korollar 4.3 b)

$$\begin{aligned}
\cos z \cos w - \sin z \sin w &= \frac{1}{4}[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})] \\
&= \frac{1}{4}[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] \\
&= \frac{1}{2}[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] = \cos(z+w).
\end{aligned}$$

Der Beweis der anderen Aussagen verläuft ähnlich und wird dem Leser überlassen.

□

Betrachtet man das erste der obigen Additionstheoreme für $z = w$, so folgt

$$\cos^2 z + \sin^2 z \overset{4.4}{=} \cos(z - z) = \cos 0 = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir halten diese wichtige Beziehung explizit im folgenden Korollar fest.

4.5 Korollar. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Wir untersuchen im Folgenden die e-Funktion speziell für reelle Argumente. Den Beweis der folgenden Eigenschaften überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

4.6 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a) $e^x < 1$ *falls* $x < 0$ *und* $e^x > 1$ *falls* $x > 0$.

b) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist streng monoton wachsend.*

c) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty,$$

d.h. mit anderen Worten, dass die exp*-Funktion für $x \to \infty$ schneller wächst als jede Potenz x^α.*

d) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

d.h. mit anderen Worten, dass die exp*-Funktion für $x \to -\infty$ schneller fällt als jede Potenz x^α.*

Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig und streng monoton wachsend ist, existiert nach Abschnitt II.1 die Umkehrfunktion

$$\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion. Diese wird wie schon in Abschnitt II als *Logarithmusfunktion* bezeichnet. Es gilt insbesondere

$$\log 1 = 0 \quad \text{und} \quad \log e = 1.$$

Ferner besitzt die Logarithmusfunktion die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log x + \log y, \quad x, y \in (0,\infty) \\ \log(\frac{x}{y}) &= \log x - \log y, \quad x, y \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, denn setzt man $a := \log x$ und $b := \log y$, so gilt $x = e^a$ und $y = e^b$ und es folgt $xy = e^a \cdot e^b = e^{a+b}$; also $\log(xy) = \log x + \log y$.

Die Exponentialfunktion erlaubt es auch die *allgemeine Potenz* a^z für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ in Einklang mit den vorherigen Definitionen der Potenz, vgl. Beispiel 1.14 c), zu definieren. Setzt man

$$a^z := e^{z \log a}, \quad z \in \mathbb{C}, a > 0,$$

so gelten für $z, w \in \mathbb{C}$ und $a > 0$ die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^z a^w &= a^{z+w}, \\ a^w b^w &= (ab)^w, \\ \log(a^z) &= z \log a, \\ (a^z)^w &= a^{zw}. \end{aligned}$$

Diese sind leicht einzusehen, denn es gilt $a^z a^w = e^{z \log a} e^{w \log a} = e^{(z+w)\log a} = a^{(z+w)}$. Der Beweis der anderen Rechenregeln verläuft analog.
Wir verifizieren ebenfalls, dass für $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$$

gilt. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass log für $x \to \infty$ langsamer wächst als jede Potenz x^α.

Wir untersuchen im Folgenden die Funktionen Sinus und Cosinus speziell für reelle Argumente und interessieren uns zunächst für ihre Nullstellen.

4.7 Lemma. *Für $x \in (0,2]$ gilt:*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{und} \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere ist $\sin x > 0$ *für* $x \in (0,2]$.

Beweis. Für $x \in (0,2]$ gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}}_{>0} + \ldots > x - \frac{x^3}{3!},$$

denn es ist $\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{x^n[(n+1)(n+2)-x^2]}{(n+2)!} > 0$. Andererseits gilt

$$\sin x = x - \underbrace{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right)}_{>0} + \ldots < x,$$

und somit folgt die Behauptung für die Sinusfunktion. Die Abschätzung für cos verläuft analog.

□

Insbesondere gilt

$$\sin x > 0 \text{ für } x \in (0,2],$$

und cos ist eine streng monoton fallende Funktion auf dem Intervall $[0,2]$; denn für $x > y$ folgt

$$\cos x - \cos y \overset{4.4}{=} -2 \underbrace{\sin(\frac{x+y}{2})}_{>0} \underbrace{\sin(\frac{x-y}{2})}_{>0} < 0, \quad x, y \in [0,2].$$

Diese Eigenschaften implizieren, dass die Cosinusfunktion im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt, wie wir im folgenden Satz sehen werden.

4.8. Satz und Definition der Zahl π. *Die Cosinus-Funktion hat im Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle x_0. Wir setzen*

$$\pi := 2x_0.$$

Die Bezeichnung π wurde durch das oben schon erwähnte Eulersche Lehrbuch populär und könnte aus dem griechischen Wort $\pi\varepsilon\varrho\iota\varphi\varepsilon\varrho\varepsilon\iota\alpha$ für Umfang herrühren. Versucht man die Zahl π heute numerisch zu berechnen, so erhält man

$$\pi = 3,14159\,26535\,89793\,23846\ldots$$

Beweis. Es gilt $\cos 0 = 1$ und das obige Lemma 4.7 impliziert, dass $\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0$ gilt. Da cos stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass cos mindestens eine Nullstelle x_0 in $[0,2]$ besitzt. Die Eindeutigkeit der Nullstelle folgt aus der strengen Monotonie von cos auf $[0,2]$.

□

4.9 Bemerkung. Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Zum Beispiel ist jede rationale Zahl p/q als Nullstelle des Polynoms $x \mapsto qx - p$ algebraisch. Reelle Zahlen, welche nicht algebraisch sind, heißen *transzendente Zahlen* ; letztere sind insbesondere irrational. H. J. Lambert bewies schon 1761, dass π irrational ist. Den Nachweis, dass π sogar transzendent ist, erbrachte F. Lindemann im Jahre 1882. Dieser Satz entschied auch das über zweitausend Jahre alte und bis heute berühmte *Problem der Quadratur des Kreises* und zwar negativ: es ist unmöglich, allein mit Zirkel und Lineal zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren.

Die obige Definition der Zahl π impliziert insbesondere, dass

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

gilt. Letztere Gleichheit gilt, da aus $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ zunächst $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ folgt, und die Positivität des Sinus in $(0,2]$ schließlich $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ impliziert.
Kombiniert man diese Formeln mit der Eulerschen Formel aus Satz 4.2 b), so erhalten wir $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$ und allgemeiner gilt die folgende Tabelle der Funktionswerte von $\cos x, \sin x$ und e^{ix}:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0
$\sin x$	0	1	0	-1
e^{ix}	1	i	-1	$-i$

Kombiniert man die obigen Funktionswerte mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, so erhalten wir die wichtige Eigenschaft der Periodizität der Exponentialfunktion.

4.10 Satz. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$e^{z+i\frac{n}{2}\pi} = e^z i^n, \qquad \textit{und insbesondere} \qquad e^{z+2in\pi} = e^z.$$

Dies bedeutet, dass die Exponentialfunktion die rein imaginäre Periode $2\pi i$ besitzt.

Im folgenden Korollar fassen wir weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zusammen.

4.11 Korollar. *a) Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

i) $\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z, \quad \cos(z+\pi) = -\cos z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z,$

ii) $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z, \quad \sin(z+\pi) = -\sin z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z,$

insbesondere sind die Funktionen sin *und* cos *periodische Funktionen mit der rellen Periode* 2π.
b) Es gilt

$$\begin{aligned} \cos z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ \sin z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ e^z = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z = 2ni\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wir beschließen unsere Diskussion der trigonometrischen Funktionen vorerst mit der Einführung der Tangens- und Cotangensfunktion. Genauer gesagt, definieren wir die *Tangensfunktion* tan und die *Cotangensfunktion* cot als

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, \qquad z &\mapsto \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{und} \\ \cot : \mathbb{C} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, \qquad z &\mapsto \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wenden wir uns den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sowie den hyperbolischen Funktionen zu. Wir beginnen mit den folgenden Eigenschaften von sin, cos und tan.

4.12 Lemma. *a) Die Funktion* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *ist stetig, surjektiv und streng monoton fallend.*
b) Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *ist stetig, surjektiv und streng monoton steigend.*
c) Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *ist stetig, surjektiv und streng monoton steigend.*

Das obige Lemma impliziert daher, dass die Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \arccos : \quad & [-1,1] \to [0,\pi] \\ \arcsin : \quad & [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arctan : \quad & \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

von sin, cos und tan auf den jeweiligen Intervallen existieren. Diese heißen *Arcus-Funktionen* und sie sind nach Satz 1.13 stetig.

Unser jetziger Kenntnisstand erlaubt es nun auch, die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen zu behandeln. Genauer gesagt gilt der folgende Satz.

4.13 Satz. (Polarkoordinatendastellung komplexer Zahlen). *Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt eine Darstellung der Form*

$$z = re^{i\varphi},$$

wobei $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ bis auf die Addition eines ganzen Vielfachen von 2π bestimmt ist.

In der obigen Darstellung heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\frac{z}{|z|} = x + iy$. Es gilt dann $x^2 + y^2 = 1$ und somit $x, y \in [-1, 1]$. Daher ist

$$\varphi := \begin{cases} \arccos x, & y \geq 0, \\ -\arccos x, & y < 0, \end{cases}$$

wohldefiniert und $\varphi \in [0, \pi]$ falls $y \geq 0$. Nach Lemma 4.7 ist $\sin \varphi \geq 0$ für alle $\varphi \in [0, 2]$ und da $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$ gilt (vgl. 4.11 b)), folgt $\sin \varphi \geq 0$ für alle $\varphi \in [0, \pi]$. Weiter, da $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = y^2$ gilt, folgt $\sin \varphi = y$. Wir erhalten also

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = x + iy = \frac{z}{|z|},$$

und somit $z = re^{i\varphi}$ für $r = |z|$. Der Fall $y < 0$ verläuft analog.

$\square$

4.14 Bemerkungen. a) Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung lässt sich das Produkt komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch gut veranschaulichen. Für $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$ gilt

$$z \cdot w = |zw|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

b) Ferner existieren zu jedem $z \in \mathbb{C}$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $z_k^n = z$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Diese Zahlen heißen *n-te Wurzeln* von z. Insbesondere existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene *Einheitswurzeln* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, d.h. komplexe Zahlen ξ_k mit $\xi_k^n = 1$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ sind explizit gegeben durch

$$z_k := \sqrt[n]{r}\xi_k \quad \text{mit} \quad \xi_k = e^{i(\frac{\varphi+2i\pi k}{n})} \quad \text{für alle} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Bei vielen Fragestellungen taucht die Exponentialfunktion in den Kombinationen $1/2(e^z + e^{-z})$ und $1/2(e^z - e^{-z})$ auf. Hierauf basierend definieren wir die hyperbolischen Funktionen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\cosh z &:= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{Cosinus hyperbolicus,}\\
\sinh z &:= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{Sinus hyperbolicus,}\\
\tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{Tangens hyperbolicus,}\\
\coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad \text{Cotangens hyperbolicus.}
\end{aligned}$$

Die Beziehungen

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = -i \sin iz, \quad z \in \mathbb{C}$$

und

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

sind ebenso schnell einzusehen, wie die Potenzreihendarstellung

$$\cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}, \quad \text{bzw.} \quad \sinh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$