3 Stetige Funktionen und Kompaktheit

Der Begriff der Kompaktheit ist von zentraler Bedeutung in der Analysis; so beruhen wichtige Existenzaussagen der Analysis auf Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Mengen. Beispielhaft nennen wir hier den folgenden Satz über die Annahme eines Maximums einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge sowie den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit.
Wir definieren den Begriff der Kompaktheit einer Menge in $\mathbb{R}^n$ durch die sogenannte Überdeckungseigenschaft und zeigen, dass für Teilmengen K des $\mathbb{R}^n$, die sogenannte Überdeckungskompaktheit mit der später eingeführten Folgenkompaktheit übereinstimmt. Der Satz von Heine-Borel besagt ferner, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Der Grund für die Einführung der Kompaktheit via Überdeckungen besteht darin, dass sich dieses Konzept später in Analysis II problemlos auf normierte oder metrische Räume verallgemeinern läßt, während die Heine-Borelsche Charakterisierung der Kompaktheit sich auf die endlich dimensionale Situation beschränkt.
In diesem Abschnitt sei K immer eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir beginnen mit der Definition der Begriffe Überdeckung und Kompaktheit.

3.1 Definition. a) Ist I eine beliebige Indexmenge, so heißt $(O_i)_{i\in I}$ eine *offene Überdeckung von* K, falls die Mengen O_i für alle $i \in I$ offen sind und

$$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$

gilt.
b) Die Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, falls *jede* offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls $O_1, \ldots, O_N$ existieren mit

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{N} O_{i_l}.$$

3.2 Beispiele. a) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn $\mathbb{R} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$, aber diese offene Überdeckung besitzt keine endliche Teilüberdeckung.
b) Das Intervall $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn $(0, 1] \subseteq \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} (\frac{1}{j}, 2)$, aber diese Überdeckung besitzt wiederum keine endliche Teilüberdeckung.
c) Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{j\to\infty} a_j = a$. Dann ist

$$K := \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

eine kompakte Menge. Zur Begründung betrachten wir eine offene Teilüberdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von K. Dann existiert ein $j \in I$ mit $a \in O_j$. Da O_j eine Umgebung von a ist, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \in O_j$ für alle $k \geq N_0$. Wählen wir nun Indizes $i_0, \ldots, i_{N_0}$ derart, dass $a_k \in O_{i_k}$ für alle $k = 1, \ldots, N_0$ gilt, so ergibt sich

$$K \subset \Big(\bigcup_{k=0}^{N_0} O_{i_k}\Big) \cup O_j.$$

d) Die Aussage von c) ist im Allgemeinen falsch, falls a aus K entfernt wird. Betrachte hierzu die Folge $(1/j)_{j\in\mathbb{N}}$ und setze $M = \{\frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ sowie $O_1 = (\frac{1}{2}, 2)$ und $O_j = (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j-1})$ für alle $j \geq 2$. Dann ist $M \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} O_j$ und jedes O_j enthält genau ein Element von M, aber die offene Überdeckung $(O_j)_{j\in\mathbb{N}}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

3.3 Satz. *Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass K beschränkt ist. Hierzu sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Dann ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(x)$, also auch $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(x)$, und da K nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{k_j}(x).$$

Setzt man $R := \max\{k_1, \cdots, k_N\}$, so gilt $K \subset B_R(x)$ und K ist somit beschränkt. Wir zeigen weiter, dass K abgeschlossen ist. Wähle hierzu $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ und für $j \in \mathbb{N}$ setze $U_j := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| > \frac{1}{j}\}$. Dann ist U_j offen und es gilt

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \{x\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j.$$

Da K nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung hiervon, d.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{j_k}$. Für $R := \max\{n_1, \ldots, n_N\}$ gilt $B_{\frac{1}{R}}(x) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash K$ und somit ist $\mathbb{R}^n \backslash K$ offen, was bedeutet, dass K abgeschlossen ist.

$\square$

3.4 Lemma. *Eine abgeschlossene Teilmenge A einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Es sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{R}^n \backslash A$ offen und es gilt

$$K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{i\in I} O_i \cup \mathbb{R}^n \backslash A.$$

Da K nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von K, d.h. es existieren $i_1, \ldots, i_N \in I$ mit

$$K \subset (O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_N}) \cup \mathbb{R}^n \backslash A.$$

Deswegen gilt $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$ und A ist kompakt.

□

3.5 Theorem. (Satz von Heine-Borel). *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Die Richtung „ $\Longrightarrow$ “ ist genau die Aussage des Satzes 3.3. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, nehmen wir an, dass K abgeschlossen und beschränkt ist und daher in einem Quader der Form

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_l \leq x_l \leq b_l\}$$

mit $a_l, b_l \in \mathbb{R}$ und $a_l \leq b_l$ für $l = 1, \ldots n$ enthalten ist. Falls wir zeigen können, dass Q kompakt ist, so folgt die Behauptung aus obigem Lemma 3.4. Dies ist aber genau die Aussage des folgenden Lemmas.

3.6 Lemma. *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ definiert wie oben. Dann ist Q kompakt.*

Beweis. Wir betrachten eine offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von Q und nehmen an, dass keine offene Teilüberdeckung von Q existiere. Im Folgenden konstruieren wir eine Folge von abgeschlossenene Teilquadern

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$$

mit der Eigenschaft, dass
i) Q_m keine endliche Teilüberdeckung besitzt und dass
ii) $\mathrm{diam}(Q_m) = 2^{-m}$ diam (Q)
gilt. Hierzu setzen wir $Q_0 = Q$ und nehmen an, dass Q_m schon konstruiert sei. Dann gilt $Q_m = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, wobei $I_l \subset \mathbb{R}$ für $l = 1, \ldots, n$ abgeschlossene Intervalle sind. Wir halbieren nun I_l, schreiben $I_l = I_l^1 \cup I_l^2$ und setzen

$$Q_m^{s_1,\ldots,s_n} := I_1^{s_1} \times I_2^{s_i} \times \ldots \times I_n^{s_n}, \qquad \text{für } s_i = 1, 2.$$

Es gilt daher

$$Q_m = \bigcup_{(s_1,\ldots,s_n) \in \{1,2\}^n} Q_m^{s_1,\ldots,s_n}.$$

Da Q_m keine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt dies auch für mindestens einen der Teilquader $Q_m^{s_1,\ldots,s_n}$. Wir bezeichnen diesen mit Q_{m+1}. Dann gilt

$$\mathrm{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(Q_m) = 2^{-m-1}\,\mathrm{diam}(Q),$$

und deshalb besitzt Q_{m+1} die obigen Eigenschaften i) und ii). Nach Satz 2.15 existiert genau ein a mit $a \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. Ferner, da $(O_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von Q ist, ist a ein Element von O_{i_0} für ein i_0, d.h. es gilt $B_\varepsilon(a) \subset O_{i_0}$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun m so groß, dass $\operatorname{diam} Q_m < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Da $a \in Q_m$ ist, gilt

$$Q_m \subset B_\varepsilon(a) \subset O_{i_0}$$

im Widerspruch zur Eigenschaft i)!

□

Der Begriff der Kompaktheit und damit zusammenhängend der Satz von Heine-Borel haben viele, sehr wichtige Konsequenzen in der Analysis. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt zunächst mit grundlegenden Eigenschaften von stetigen Bildern kompakter Mengen.

3.7 Theorem. (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt). *Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, so ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt.*

Beweis. Es sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach dem Charakterisierungstheorem für stetige Funktionen 2.17 ist $V_i = f^{-1}(O_i)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $K \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Da K nach Voraussetzung kompakt ist, besitzt die obige Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung und es gilt $K \subset \bigcup_{l=1}^N V_{i_l}$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Daher gilt $f(K) \subset \bigcup\limits_{l=1}^{N} O_{i_l}$ und die obige Überdeckung von $f(K)$ besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung.

□

Das folgende Korollar folgt direkt aus Theorem 3.7 und Satz 3.3.

3.8 Korollar. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann ist $f(K)$ beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$ mit $|f(x)| \le M$ für alle $x \in K$.*

3.9 Satz. (Stetige Funktion nehmen auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an). *Es sei $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und K kompakt. Dann nimmt die Funktion f ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_0, x_1 \in K$ mit*

$$f(x_0) = \min_{x\in K} f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_1) = \max_{x\in K} f(x).$$

Der Beweis verläuft wie folgt. Nach Theorem 3.7 ist $f(K)$ kompakt und daher nach Satz 3.3 beschränkt und abgeschlossen. Also ist

$$m := \inf f(K) > -\infty \quad \text{und} \quad M := \sup f(K) < \infty.$$

Es existieren daher Folgen $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}, (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ mit $y_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} m$ und $z_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} M$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.14 dass m und M in $f(K)$ liegen. Also existieren $x_0, x_1 \in K$ mit $f(x_0) = m$ und $f(x_1) = M$.

□

Der eben bewiesene Satz 3.9 impliziert ferner, dass eine abgeschlossene und eine kompakte Menge mit leerem Durchschnitt immer einen strikt positiven Abstand haben. Wir definieren hierbei den Abstand zweier Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ wie folgt: für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$d(x, M_1) := \inf\{|x-y| : y \in M_1\}$$

der *Abstand* von x zu M_1 und

$$d(M_1, M_2) := \inf\{|x-y| : x \in M_1, y \in M_2\}$$

heißt der *Abstand* der Mengen M_1 und M_2.

3.10 Korollar. *Für eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K = \emptyset$ gilt $d(A, K) > 0$.*

Beweis. Die Funktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ ist stetig und K ist nach Voraussetzung kompakt. Nach Satz 3.9 existiert ein $x_0 \in K$ mit $d(x_0, A) = d(K, A)$. Falls $d(x_0, A) = 0$ gelten würde, so würde eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A$ existieren mit $d(x_0, a_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ würde gegen x_0 konvergieren. Da A abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in A$ und es gilt $x_0 \in A \cup K$, im Widerspruch zu $A \cap K = \emptyset$.

□

3.11 Theorem. (Folgenkompaktheit). *Für eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) K ist kompakt (überdeckungskompakt).

ii) Jede Folge in K besitzt eine Teilfolge, welche gegen ein $a \in K$ konvergiert. (folgenkompakt).

Beweis. „ $\Longrightarrow$ “: Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch sei. Dann existiert eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in K, welche keine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von K konvergiert. Also existiert für jedes $x \in K$ eine Umgebung U_x von x mit der Eigenschaft, dass höchstens endlich viele Folgenglieder von $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in U_x enthalten sind. Da $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ und K nach Voraussetzung kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in K$ derart, dass K von $\{U_{x_k} : k = 1, \ldots, N\}$ überdeckt wird. Somit enthält K nur endlich viele Folgenglieder, im Widerspruch zur Annahme.
„ $\Longleftarrow$ “: Wir notieren zunächst, dass die Menge K beschränkt ist, denn ansonsten

würde eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ existieren mit $|a_j| \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, welche dann aber keine konvergente Teilfolge besitzen würde.
Nach dem Satz von Heine-Borel bleibt zu zeigen, dass K abgeschlossen ist. Hierzu sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $\lim_{j\to\infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge $(a_{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} a_{j_l} = a' \in K$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts impliziert aber, dass $a = a'$ und somit $a \in K$ gilt. Nach Satz 2.14 ist K somit abgeschlossen und der Satz von Heine-Borel impliziert, dass K kompakt ist.

□

Wir betrachten nun den Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit* einer Funktion f welche auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Die Stetigkeit einer solchen Funktion $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in M$ bedeutet bekanntlich, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon, x_0) : x \in M, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Hierbei hängt δ im allgemeinen von x_0 ab! Falls man δ unabhängig von x_0 wählen kann, so nennen wir f gleichmäßig stetig auf M. Genauer gesagt gilt die folgende Definition.

3.12 Definition. Eine Funktion $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig,* falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ (unabhängig von x) existiert mit

$$x, y \in M, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir verifizieren, dass jede Lipschitzstetige Funktion gleichmäßig ist, hingegen ist die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmässig stetig ist. Die Wurzelfunktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty), x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig.

Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist.

3.13 Satz. (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig).
Ist $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und K eine kompakte Menge, so ist f gleichmäßig stetig auf K.

Beweis. Die Stetigkeit von f besagt, dass für $\varepsilon > 0$ und $y \in M$ ein Radius $r_y > 0$ existiert mit

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; z \in B_{r_y}(y) \cap K.$$

Da $K \subseteq \bigcup_{y\in K} B_{\frac{r_y}{2}}(y)$ und da K nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{\frac{r_{y_j}}{2}}(y_j).$$

Wählen wir nun $\delta := \frac{1}{2}\min\{r_{y_1},\ldots,r_{y_N}\}$ und $x,x' \in K$ mit $|x-x'| \leq \delta$, so existiert ein $j \in \{1,\ldots,N\}$ mit $x \in B_{\frac{r_{y_j}}{2}}(y_j)$ und $x' \in B_{r_{y_j}}(y_j)$ und

$$|f(x)-f(x')| \leq \underbrace{|f(x)-f(y_j)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y_j)-f(x')|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

□

Die Fortsetzung einer gegebenen stetigen Funktion $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ zu einer stetigen Funktion auf $\overline{M}$ ist eng mit dem Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit verbunden. Genauer gesagt, sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$ ein Häufungspunkt von M. Wir wollen nun der Frage nachgehen unter welchen Bedingungen eine stetige Erweiterung von f auf $M \cup \{x_0\}$ existiert?
Zunächst wollen wir aber den Begriff des Grenzwerts einer Funktion präzisieren.

3.14 Definition. Eine Funktion $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ hat im Häufungspunkt x_0 von M den *Grenzwert* a, wenn für jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{x_0\}$ mit $x_j \to x_0$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = a.$$

In diesem Fall sagt man auch, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen a konvergiert und schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{ oder } \quad f(x) \to a \ \text{ für } \ x \to x_0.$$

Gehört x_0 zum Definitionsbereich von f und ist f stetig in x_0, so ist der Funktionswert in x_0 identisch mit dem Grenzwert in x_0, d.h. es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Ferner heißt $F : M \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in M \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

eine *stetige Erweiterung* von f auf $M \cup \{x_0\}$, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ existiert. Ist speziell $M \subset \mathbb{R}$, so heißt

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = y_0$$

linksseitiger Grenzwert von f in x_0, falls für alle Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $M \cap (-\infty, x_0)$ mit $x_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ die Folge $(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ gegen y_0 konvergiert. Analog heißt

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = y_0$$

rechtsseitiger Grenzwert von f in x_0, falls für alle Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $M \cap (x_0, \infty)$ mit $x_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ die Folge $(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ gegen y_0 konvergiert.

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt $a \in \mathbb{C}$ der *Grenzwert von f in ∞*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } x > N_0$$

gilt. Analog definiert man den Grenzwert in $-\infty$.

3.15 Beispiele. a) Betrachtet man die Menge $M = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x^n-1}{x-1}$, so gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n,$$

denn es ist $\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.
b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dies folgt aus der Darstellung

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots,$$

denn es gilt

$$|\frac{e^x - 1}{x} - 1| \le |\frac{x}{2}|(1 + |x| + |x^2| + \ldots) = \frac{|x|}{2(1 - |x|)} \to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

für $|x| < 1$ aufgrund der geometrischen Reihe.
c) Der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

existiert nicht, da für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := 1$ für $x > 0$ und $f(x) := -1$ für $x < 0$, der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to 0-0} f(x) = -1$ nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1$ übereinstimmt.

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit einer Charakterisierung stetiger Fortsetzbarkeit gegebener stetiger Funktionen durch ihre gleichmäßige Stetigkeit.

3.16 Satz. *Für eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) Es existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $F : \overline{M} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f auf $\overline{M}$.

ii) Die Funktion f ist gleichmäßig stetig auf M.

Beweis. „ $\Longrightarrow$ “ : Da $\overline{M}$ beschränkt und abgeschlossen ist, folgt aus dem Satz von Heine-Borel, dass $\overline{M}$ kompakt ist. Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 3.13. Für die umgekehrte Richtung „ $\Longleftarrow$ “ verweisen wir auf die Übungen.

$\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir die sogenannte Sägezahnfunktion f gegeben durch

$$f(x) := \left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und } g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in I = (0,1).$$

Dann ist die Funktion g stetig im Intervall $I = (0,1)$, aber nicht gleichmässig stetig. Letzteres folgt aus

$$g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1/2}\right) = f(n) - f(n+1/2) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach obigem Satz lässt sich g daher nicht als stetige Funktion auf das abschlossene Intervall $[0,1]$ fortsetzen; insbesondere existiert der Grenzwert von $g(x)$ für $x \to 0+$ nicht.