2 Topologische Grundlagen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem Begriff des Vektorraums, welcher in der modernen Analysis eine sehr wichtige Rolle spielt. Im gesamten Abschnitt sei der zugrundeliegende Skalarkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir beginnen zunächst mit dem Begriff des Vektorraums über $\mathbb{K}$, wie wir ihn schon aus der Linearen Algebra kennen.

2.1 Definition. Ein *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, oder ein $\mathbb{K}$-VR ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $V \neq \emptyset$, einer Verknüpfung $+$, sowie einer äußeren Verknüpfung $\cdot :$, $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, genannt *Skalarmultiplikation* mit folgenden Eigenschaften:

(VR1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(VR2) Es gelten die Distributivgesetze

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \qquad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v, w \in V.$$

(VR3) $\lambda \cdot (\mu v) = (\lambda\mu) \cdot v, 1 \cdot v = v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ v \in V.$

Der Vektorraum heißt *reell* bzw. *komplex*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

Die Elemente von V heißen *Vektoren*, während die Elemente von $\mathbb{K}$ *Skalare* heißen. Der Begriff des Vektorraums wird in der Linearen Algebra im Detail diskutiert.

2.2 Beispiele. a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sowie $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\mathbb{K}^n$ versehen mit der Addition, bzw. mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot x &:= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Insbesondere sind also $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ Vektorräume.
b) Für eine Menge X, ist die Menge $V^X := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist Abbildung}\}$ versehen mit

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

ein Vektorraum.
c) Die Menge $c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : (x_n)_{b\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}\}$ versehen mit der koordinatenweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (x_n)n \in \mathbb{N} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \\ (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) \end{aligned}$$

ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dies folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

Wir wollen nun dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine *euklidische Struktur* aufprägen und führen zu diesem Zweck den Begriff des *euklidischen Abstands* zweier Elemente aus $\mathbb{R}^n$ ein. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ nennen wir

$$|x-y| := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

den *euklidischer Abstand* von x und y. Insbesondere gilt

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Ferner nennen wir die Menge

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ die *offene Kugel* mit Mittelpunkt x und Radius r.

Im Folgenden übertragen wir den uns bekannten Konvergenzbegriff für Folgen und Reihen reeller Zahlen auf Folgen und Reihen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Hierzu erweist es sich als nützlich, einige grundlegende topologische Begriffe für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einzuführen. Diese Begriffe gehen vor allem auf FELIX HAUSDORFF zurück.

2.3 Definition. a) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung* von $x \in \mathbb{R}^n$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, derart dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ gilt. Die Menge $B_\varepsilon(x)$ heißt auch *ε-Umgebung* von x.
b) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen* in $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset M$ gilt.

Betrachtet man zwei reellen Zahlen a und b mit $a < b$, so ist das Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, denn für $x \in (a,b)$ setzen wir $\varepsilon := \min\{|a-x|, |b-x|\}$ und es gilt dann $B_\varepsilon(x) \subset (a,b)$. Ferner sind die Intervalle (a,∞) und $(-\infty,a)$ ebenfalls offen. Das Intervall $[a,b]$ ist nicht offen, denn $B_\varepsilon(a) \not\subset [a,b]$ für jedes $\varepsilon > 0$. Die Kugel $B_r(x)$ um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ ist hingegen eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

2.4 Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen* in $\mathbb{R}^n$, falls $M^c := \mathbb{R}^n \backslash M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin M\}$ offen ist in $\mathbb{R}^n$.

Beispiele von abgeschlossenen Mengen lassen sich leicht angeben. Wählen wir $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist das Intervall $[a,b]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$, das Intervall (a,b) hingegen ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Das Intervall $[0,1)$ ist nicht offen und nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und die Menge Q gegeben durch $Q := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \leq b_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

In den beiden folgenden Sätzen betrachten wir beliebige Vereinigungen und Durchschnitte offener bzw. abgeschlossener Mengen.

2.5 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*
a) Die leere Menge $\emptyset$ *sowie* $\mathbb{R}^n$ *sind offen in* $\mathbb{R}^n$.
b) Für eine beliebige Indexmenge I *seien* $O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ *offene Mengen für alle* $\alpha \in I$. *Dann ist* $\bigcup\limits_{\alpha\in I} O_\alpha$ *offen in* $\mathbb{R}^n$; *mit anderen Worten sind beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen.*
c) Es seien $O_1, O_2, \ldots, O_N \subset \mathbb{R}^n$ *offene Mengen. Dann ist* $\bigcap\limits_{i=1}^{N} O_i$ *offen in* $\mathbb{R}^n$; *mit anderen Worten bedeutet dies, dass endliche Schnitte offener Mengen wiederum offen sind.*

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Das Beispiel der offenen Intervalle $I_n := (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ mit $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$ zeigt, dass beliebige Schnitte offener Mengen nicht wiederum offen sind.

Der zu Satz 2.5 analoge Satz für abgeschlossene Mengen lautet wie folgt.

2.6 Satz. *a) Die leere Menge* $\emptyset$ *und* $\mathbb{R}^n$ *sind abgeschlossen in* $\mathbb{R}^n$.
b) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
c) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Der Beweis folgt aus dem obigen Satz 2.5 und den De Morganschen Regeln; vgl. die Übungsaufgaben. Man beachte, dass die Aussage c) des obigen Satzes für beliebige Vereinigungen nicht richtig ist, da zum Beispiel die Menge $B_{\frac{1}{n}}(0)^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen ist, aber dies für die Vereinigung $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [B_{\frac{1}{n}}(0)^c] = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nicht mehr gilt.

Wir führen im Folgenden weitere topologische Grundbegriffe ein.

2.7 Definition. a) Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ heißt x *Randpunkt* von M, falls jede Umgebung U von x sowohl einen Punkt aus M als auch einen aus $\mathbb{R}^n \setminus M$ enthält.
b) Die Menge

$$\partial M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Randpunkt von } M\}$$

heißt *Rand* von M und

$$\mathring{M} := M \setminus \partial M$$

wird als *Inneres* von M bezeichnet. Ein Element $a \in \mathring{M}$ heißt *innerer Punkt* von M.
c) Ferner wird $x \in \mathbb{R}^n$ als *Häufungspunkt* von $M \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet, falls jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von M enthält.
d) Die Menge

$$\overline{M} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in M \text{ oder } x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$$

heißt *Abschluss* von M.
e) Schließlich heißt die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt*, falls $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ existieren, so dass $M \subset B_r(x)$ gilt.

Betrachtet man zum Beispiel die abgeschlossene Einheitskugel $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, so ist deren Inneres $\mathring{M}$ und der Rand von M gegeben durch $\mathring{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ bzw. durch die Einheitssphäre $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Die folgenden Eigenschaften offener bzw. abgeschlossener Mengen erweisen sich oft als nützlich.

2.8 Bemerkungen. (Inneres, Rand, Abschluss). Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gelten die folgenden Aussagen:
a) Das Innere von M ist gegeben durch

$$\mathring{M} = \bigcup_{O \subseteq M, O \text{ offen}} O.$$

Insbesondere ist $\mathring{M}$ offen und $\mathring{M}$ ist die größte offene Menge, welche in M enthalten ist.
b) Der Abschluss von M ist gegeben durch

$$\overline{M} = \mathring{M} \cup \partial M = \bigcap_{M \subseteq A, A \text{ abg.}} A.$$

Also ist $\overline{M}$ abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Menge, welche M enthält.
c) Für den Rand ∂M von M gilt $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$; also ist ∂M abgeschlossen.

2.9 Satz. (Hausdorffsches Trennungsaxiom) *Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$. Dann existieren Umgebungen U_x von x sowie U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Der Beweis ist nicht schwierig: für $\varepsilon := \frac{|x-y|}{2}$ setzen wir $U_x := B_\varepsilon(x)$ und $U_y := B_\varepsilon(y)$ und nehmen an dass ein $z \in \mathbb{R}^n$ existiere mit $z \in U_x \cap U_y$. Dann wäre aber $2\varepsilon = |x - y| \leq \underbrace{|x - z|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|z - y|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$. Widerspruch!

Nach unseren Untersuchung der Konvergenz von reellen oder komplexen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Kapitel II, betrachten wir nun die Konvergenz von Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Die Definition der Konvergenz lautet in diesem Fall wie folgt.

2.10 Definition. Eine Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}^n$, falls für alle Umgebungen U von a ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_j \in U$ für alle $j \geq N_0$. In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{j \to \infty} a_j = a$.

Das folgende Resultat besagt, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn jede ihrer Koordinatenfolgen konvergiert.

2.11 Lemma. *Eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn*

$$\lim_{j\to\infty} a_{l,j} = a_l, \quad l = 1, \ldots, n,$$

gilt, d.h. genau dann, wenn die l-te Koordinatenfolge von $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen a_l für alle $l = 1, \ldots, n$ konvergiert.

Beweis. „ $\Longrightarrow$ “: Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_j - a|^2 = \sum_{l=1}^n |a_{l,j} - a_l|^2 < \varepsilon$ für alle $j \geq N_0$. Daher ist $|a_{l,j} - a_l| \leq |a_j - a| < \varepsilon$ für alle $l = 1, \ldots, n$ und alle $j \geq N_0$.
„ $\Longleftarrow$ “: Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $l = 1, \ldots, n$ ein $N_l \in \mathbb{N}$ mit $|a_{l,j} - a_l| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ für alle $j \geq N_l$. Somit gilt

$$|a_j - a| = \Big(\sum_{l=1}^n |a_{l,j} - a_l|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\frac{\varepsilon^2}{n} n\Big)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

für alle $j \geq N_0 := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$.

$\square$

Die Verallgemeinerung des Begriffs der Cauchyfolge auf die n-dimensionale Situation bereitet keine Schwierigkeiten und die folgende Definition ist natürlich.

2.12 Definition. Eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

Der folgende Satz über die Konvergenz von Cauchyfolgen in $\mathbb{R}^n$ beruht letztendlich wiederum auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

2.13 Satz. *In $\mathbb{R}^n$ ist jede Cauchyfolge konvergent.*

Beweis. Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Da

$$|a_{l,n} - a_{l,m}| \leq \Big(\sum_{l=1}^n |a_{l,n} - a_{l,m}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $l = 1, \ldots, n$ gilt, ist jede Koordinatenfolge $(a_{l,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert daher die Koordinatenfolge $(a_{l,k})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $l = 1, \ldots, n$ und die Behauptung folgt aus Lemma 2.11.

□

Der folgende Satz beschreibt die Abgeschlossenheit einer Menge in Termen von konvergenten Folgen.

2.14 Satz. (Charakterisierung abgeschlossener Mengen via Folgen). *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\lim_{j\to\infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$ gilt $a \in A$.*

Beweis. „ $\Longrightarrow$ “: Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$ eine Folge in A mit $\lim_{j\to\infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass a kein Element von A sei, d.h. dass $a \in \mathbb{R}^n\backslash A$ gelte. Da $\mathbb{R}^n\backslash A$ nach Voraussetzung offen ist, ist insbesondere $\mathbb{R}^n\backslash A$ eine Umgebung von a. Nach Definition der Konvergenz (vgl. Definition 2.10) existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_j \in \mathbb{R}^n\backslash A$ für alle $j \geq N_0$. Widerspruch!
„ $\Longleftarrow$ “: Wir nehmen wiederum an, dass die Behauptung falsch sei, d.h. dass A^c nicht offen sei. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}^n\backslash A$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ nicht in $\mathbb{R}^n\backslash A$ enthalten ist; also gilt $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$. Wählen wir für $j \in \mathbb{N}$ nun $a_j \in U_{\frac{1}{j}}(a) \cap A$, so gilt $\lim_{j\to\infty} a_j = a \notin A$. Widerspruch!

□

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir ihren *Durchmesser* diam$M$ als

$$\text{diam } M := \sup\{|x-y| : x, y \in M\}.$$

Es gilt dann der folgende Satz.

2.15 Satz. *Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit*

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

und $\lim_{j\to\infty}$ diam $A_j = 0$. *Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \in \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} A_j$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Existenz eines Elements $x \in \mathbb{R}^n$ mit der gewünschten Eigenschaft. Wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A_n$, so existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| \leq \text{ diam } A_N, \qquad n, m \geq N.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und Satz 2.13 impliziert, dass sie gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da $x_n \in A_k$ für alle $n \geq k$ gilt und da jedes A_k abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.14, dass $x \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Eindeutigkeit von x ist klar.

□

Wir übertragen schließlich den Begriff der Folgenstetigkeit einer reellen Funktion auf reellwertige Funktionen deren Definitionsbereich eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

2.16 Definition. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt f *stetig* in $x_0 \in M$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Falls f für alle $x_0 \in M$ stetig ist, so heißt f *stetig.*

Wir wollen nun die obige Definition der Stetigkeit einer Funktion f in die Sprache der Umgebungen umformulieren. Genauer gesagt ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}$ eine Umgebung U von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $f(U) \subset V$.

Das folgende Theorem ist eine fundamentale Charakterisierung stetiger Funktionen, welche auch in einem abstrakteren Rahmen noch Bestand hat.

2.17 Theorem. *Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) f ist stetig.

ii) $f^{-1}(O)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ für jede in $\mathbb{R}$ offene Menge O, d.h. mit anderen Worten, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

iii) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ für jede in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Menge A, d.h. mit anderen Worten, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ ii): Es sei $O \subset \mathbb{R}$ offen. Gilt $f^{-1}(O) = \emptyset$, so folgt die Behauptung direkt aus Satz 2.5 a). Es gelte im Folgenden also $f^{-1}(O) \neq \emptyset$. Da f nach Voraussetzung stetig ist, existiert für jedes $x \in f^{-1}(O)$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x mit $f(U_x) \subset O$, d.h. es gilt $x \in U_x \subset f^{-1}(O)$ für jedes $x \in f^{-1}(O)$. Daher ist

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x\in f^{-1}(O)} U_x,$$

als Vereinigung offener Mengen nach Satz 2.5 wiederum offen.
ii) $\Rightarrow$ iii): Es sei $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, also ist A^c offen in $\mathbb{R}$. Da nach Voraussetzung $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist, folgt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.
iii) $\Rightarrow$ i): Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und V eine offene Umgebung von $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Da V^c abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist, impliziert die Voraussetzung dass $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist. Also ist $U := f^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und da $x \in U$ ist U eine Umgebung von x mit $f(U) \subset V$.

$\square$

Bevor wir nun Beispiele betrachten mit dem Ziel die Aussage des obigen Theorems zu erläutern, bemerken wir, dass nach Theorem 2.17 eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ also genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Mengen offen bzw. wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

2.18 Beispiele. a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1}(y)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Dies ist offensichtlich, da die Menge $\{y\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
b) Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\} \text{ abgeschlossen und die Menge } \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < r\} \text{ offen.}$$

Dies folgt unmittelbar aus obigem Theorem 2.17, da $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\} = f^{-1}((-\infty, r])$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < r\} = f^{-1}((\infty, r))$ gilt und die Intervalle $(-\infty, r]$ und $(-\infty, r)$ abgeschlossen bzw. offen sind.
c) Der abgeschlossene n-dimensionale Einheitswürfel

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, 1 \leq j \leq n\}$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Um dies einzusehen, notieren wir, dass die Projektion auf die j-te Koordinate gegeben durch $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ eine stetige Abbildung ist. Da Q in der Form

$$Q = \bigcap_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : p_j(x) \leq 1\}}_{\text{abg. nach b)}} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : p_j(x) \geq 0\}}_{\text{abg. nach b)}} \Big)$$

dargestellt werden kann, und endliche Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind (vgl. Satz 2.5), folgt die Behauptung aus Theorem 2.17.
d) Man beachte, dass stetige Bilder abgeschlossener (offener) Mengen im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen (offen) sind. Wir betrachten hierzu die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Dann ist $A = f^{-1}(\{1\})$ und nach Aussage b) von Theorem 2.17 ist A abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Nun ist die Projektion auf die erste Koordinate $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ stetig, aber $p_1(A) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht abgeschlossen.
Als weiteres Beispiel betrachten wir das offene Intervall $O = (-1, 1)$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Dann ist $f(O) = [0, 1)$ nicht offen in $\mathbb{R}$.