III Stetige Funktionen und Topologische Grundlagen

1 Stetige Funktionen

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Untersuchung stetiger Funktionen und ihrer Eigenschaften. Der von uns im Folgenden verwandte Begriff der Stetigkeit geht, wie schon der Konvergenzbegriff, im wesentlichen auf Cauchy zurück, der in seinem *Cours d'Analyse* (1821) die Stetigkeit einer Funktion wie folgt definierte: *En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.* Cauchy verwendet noch die damals übliche Bezeichnung der unendlich kleinen Größe (*quantité infiniment petite*), welche aber im Laufe der Zeit durch die heute gebräuchliche $\varepsilon\delta$-Formulierung abgelöst wurde. Letztere wurde wesentlich durch Weierstraß beeinflußt.
Wir erinnern zunächst noch einmal an die Definition einer Funktion. Hierzu seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion, d.h. eine Vorschrift welche auf *eindeutige* Weise jedem $x \in X$ ein Element $y \in Y$ zuordnet. Die Menge

$$Graph f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

nennen wir den *Graph* von f.

Wir beginnen mit der Definition der Stetigkeit einer Funktion, welche auf dem Konvergenzbegriff für Folgen aufbaut.

1.1 Definition. (Folgenstetigkeit). Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Mit anderen Worten ist f in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn

$$(x_n) \subset D, x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$$

gilt. Die Funktion f heißt *stetig in* D, falls f in allen Punkten $x_0 \in D$ stetig ist.

Der folgende Satz ist eine Umformulierung der Definition der Stetigkeit in die $\varepsilon - \delta$ Sprache, wie wir sie abgewandelt schon aus der Konvergenztheorie für Folgen und Reihen kennen.

1.2 Satz. ($\varepsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit). *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist im Punkte $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass gilt:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D \textit{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

In Quantoren geschrieben bedeutet dies:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \textit{ so dass } x \in D, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": Wir nehmen an die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit

$$|x_0 - x_\delta| < \delta \text{ und } |f(x_0) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Damit gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$ für $n \to \infty$. Widerspruch!
"$\Longleftarrow$": Nach Voraussetzung existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D welche gegen x_0 konvergiert, so existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq N_0$. Daher ist $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ und somit gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

□

1.3 Beispiele. a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig, denn $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ impliziert $f(x_n) = ax_n + b \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} ax + b = f(x)$.
b) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.
c) Die *Heavyside-Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber unstetig in 0.
d) Die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1},\ n = 2, 3, \ldots \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist stetig in 0, da man wegen $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$ zum Beispiel $\delta = \varepsilon$ wählen kann.
e) Die *Dirichletsche Sprungfunktion* gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ unstetig. Beweis als Übungsaufgabe.
f) Wir betrachten eine Modifikation der Dirichletschen Sprungfunktion und definieren f durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit } q > 0 \text{ minimal} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist f in allen irrationalen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ stetig, hingegen unstetig in allen rationalen Punkten $x_0 \in \mathbb{Q}$! Den Beweis überlassen wir wiederum als Übungsaufgabe.
g) Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D. \tag{1.1}$$

Dann ist f stetig, denn wählt man für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ als $\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}$, so folgt die Behauptung aus der Definition. Eine Funktion, welche der obigen Bedingung (1.1) genügt, heißt *Lipschitzstetig* und L heißt die *Lipschitzkonstante* von f.
h) Jede Lipschitzstetige Funktion f ist stetig. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Betrachte hierzu zum Beispiel die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist f stetig, aber nicht Lipschitzstetig.
i) Die Funktionen $f_1, \ldots, f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$f_1(z) = |z|, \quad f_2(z) = \bar{z}, \quad f_3(z) = \operatorname{Re} z, \quad f_4(z) = \operatorname{Im} z.$$

Dann sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_4$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, also insbesondere stetig.

Die obige Definition der Stetigkeit via Folgen erlaubt es unsere Kenntnisse über konvergente Folgen auf stetige Funktionen zu übertragen. Genauer gesagt definieren wir zunächst die Summe, das Produkt und den Quotienten zweier Funktionen. Hierzu seien $f, g : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g &: D \to \mathbb{K}, & (\alpha f + \beta g)(x) &:= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ f \cdot g &: D \to \mathbb{K}, & (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \tfrac{f}{g} &: \{x \in D : \; g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}, & (\tfrac{f}{g})(x) &:= \tfrac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

so gilt der folgende Satz.

1.4 Satz. *Es seien $f, g : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zwei in $x_0 \in D$ stetige Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Die Summe $\alpha f + \beta g : D \to \mathbb{K}$ ist stetig in $x_0 \in D$.

b) Das Produkt $f \cdot g : D \to \mathbb{K}$ ist stetig in x_0.

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ und die Funktion $\frac{f}{g} : U_\delta(x_0) \cap D \to \mathbb{K}$ ist stetig in x_0.

Beweis. Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus der Definition 1.1 und den Rechenregeln für konvergente Folgen.
c) Nach Voraussetzung ist $|g(x_0)| =: \gamma > 0$. Da nach Voraussetzung ferner g in x_0 stetig ist, folgt

$$|g(x_0)| - |g(x)| \leq |g(x_0) - g(x)| < \frac{\gamma}{2}, \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D$$

für ein $\delta > 0$. Daher ist $|g(x)| > \frac{\gamma}{2}$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap D$. Die Behauptung folgt nun aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

□

Als nächstes betrachten wir die Verknüpfung zweier Funktionen $f : D_f \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $g : D_g \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $g(D_g) \subset D_f$. Wir definieren $f \circ g : D_g \to \mathbb{K}$ als

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D_g.$$

Der folgende Satz besagt, dass die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

1.5 Satz. *Es seien $f : D_f \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $g : D_g \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen mit $g(D_g) \subset D_f$. Ist g in $x_0 \in D_g$ und f in $g(x_0) \in D_f$ stetig, so ist $f \circ g$ in x_0 stetig.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_g$ eine Folge in D_g mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Da g nach Vorausetzung in x_0 stetig ist, folgt $g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x_0)$. Wiederum, da f in $g(x_0)$ stetig ist, folgt $(f\circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(g(x)) = (f\circ g)(x)$. Also ist $f\circ g$ nach Definition in x_0 stetig.

□

1.6 Beispiele. a) Alle Polynome, d.h. alle Funktionen der Art

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{K}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ sind stetig.
b) Sind p und q Polynome, so ist die Funktion $\frac{p}{q}$ gegeben durch

$$\frac{p}{q}(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit } D_{\frac{p}{q}} = \{z \in \mathbb{K} : q(z) \neq 0\}$$

stetig. Solche Funktionen heißen *rationale Funktionen.*
c) Die *Signumfunktion* $\mathrm{sign} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{sign}(z) := \frac{z}{|z|}$ ist stetig.

Potenzreihen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der Polynome. Wir zeigen im Folgenden, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen sind. Genauer gilt der folgende Satz.

1.7 Satz. *Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist $f : B_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine stetige Funktion.*

Beweis. Es seien $z_0 \in B_\varrho(0)$, $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ so gewählt, dass $|z_0| < r < \varrho$ gilt. Theorem II.5.3 impliziert, dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty |a_n| r^n$ konvergiert, d.h. es existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N_0+1}^\infty |a_n| r^n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\le \Big|\sum_{n=0}^{N_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N_0} a_n z_0^n\Big| + \sum_{n=N_0+1}^\infty |a_n||z|^n + \sum_{n=N_0+1}^\infty |a_n||z_0|^n \\ &\le |p(z) - p(z_0)| + 2\underbrace{\sum_{n=N_0+1}^\infty |a_n| r^n,}_{<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}} \end{aligned}$$

wobei wir $p(w) = \sum_{n=0}^{N_0} a_n w^n$ gesetzt haben. Da Polynome stetig sind, existiert ein $\delta \in (0, r - |z_0|)$ mit $|p(z) - p(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ falls nur $|z - z_0| < \delta$ gilt. Also ist $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ falls $|z - z_0| < \delta$ gilt und f ist somit nach dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium aus Satz 1.2 stetig.

□

Wenden wir obigen Satz auf die Exponentialfunktion an, so folgt, dass die Exponentialfunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig ist.

1.8 Korollar. (Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ *ist stetig.*

Nach Beispiel II.5.5 a) besitzt die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ den Konvergenzradius $\varrho = \infty$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 1.7.

Viele Existenzaussagen in der Analysis beruhen auf dem sogenannten Zwischenwertsatz. Die Notwendigkeit eines Beweises dieses auf den ersten Blick offensichtlichen Satzes geht auf Bolzano zurück. Aus heutiger Sicht handelt es sich bei dem folgenden Satz um eine Variante der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Im Folgenden setzen wir wiederum $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

1.9 Theorem. (Zwischenwertsatz). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$.*

Der obige Satz ist anschaulich klar, doch Vorsicht ist geboten! Betrachte $D := \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x \mapsto x^2 - 2$. Dann ist $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$, aber es existiert *kein* $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis. Betrachte die Menge M definiert durch $M := \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$. Da nach Voraussetzung $f(a) < 0$ gilt, ist $a \in M$ und $M \neq \emptyset$. Ferner ist M nach oben beschränkt durch b und das Vollständigkeitsaxiom impliziert daher, dass $x_0 := \sup M \in [a,b]$ existiert. Wir zeigen im Folgenden, dass $f(x_0) = 0$ gilt.
Hierzu nehmen wir zunächst an, dass $f(x_0) < 0$ ist. Dann gilt $b - x_0 > 0$ und da f nach Voraussetzung stetig ist, existiert zu $\varepsilon := \frac{-f(x_0)}{2} > 0$ ein $\delta \in (0, b - x_0)$ mit

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon \quad \text{falls} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b].$$

Also ist $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ und es gilt

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] \subseteq M.$$

Insbesondere ist daher $x_0 + \delta \in M$, was aber im Widerspruch zur Definition von x_0 steht.
Nehmen wir an, dass $f(x_0) > 0$ gilt, so ist $x_0 - a > 0$ und analog zu oben gibt es zu $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$ wegen der Stetigkeit von f ein $\delta \in (0, x_0 - a)$ mit

$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b].$$

Also ist $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ und daher gilt

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] \cap M = \emptyset.$$

Insbesondere, da $x_0 - \delta > a$ gilt, ist $x_0 - \delta$ eine obere Schranke von M im Widerspruch zur Definition von x_0. Zusammengefasst gilt also $f(x_0) = 0$.

□

1.10 Bemerkungen. a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Mit anderen Worten sei c so gewählt, dass $f(a) < c < f(b)$ gilt. Der Zwischenwertsatz impliziert dann, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = c$. Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.
b) Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.
c) Für alle $y > 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$. Wir bezeichen dieses x als

$$x := \log y$$

und nennen es denn *natürlichen Logarithmus* von y.
Um diese Eigenschaft einzusehen, notieren wir zunächst, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \ldots \geq 1 + n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

gilt. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion impliziert nun $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also existiert für $y > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-N_0) < y < \exp(N_0)$. Die Exponentialfunktion $\exp : [-N_0, N_0] \to \mathbb{R}$ ist nach Korollar 1.8 stetig, also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [-N_0, N_0]$ mit $\exp(x) = y$. Zum Beweis der Eindeutigkeit von x nehmen wir an, dass ein $r \in \mathbb{R}$ existiere mit OBdA $x < r$ und dass $\exp x = y = \exp r$ gelte. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion impliziert dann $\exp(r)/\exp(x) = \exp(h)$ für $h = r - x$ und da

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots > 1$$

für $h > 0$ gilt, folgt $\exp(x) < \exp(r)$ und $\exp(x) = y < \exp(r)$. Widerspruch!
Die Funktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto \log y$ heißt *Logarithmusfunktion*.

Als weitere Anwendung des Zwischenwertsatzes betrachten wir nun das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion. Hierbei heißen alle folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ *Intervalle*:

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\} \\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.11 Satz. (Stetige Bilder von Intervallen). *Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ wiederum ein Intervall.*

Beweis. Es sei $a := \inf f(I) := \inf\{f(x) : x \in I\}$ und $b := \sup f(I) := \sup\{f(x) : x \in I\}$. Nach Definition des Supremums bzw. des Infimums existieren für alle $\varepsilon > 0$ Zahlen $a_\varepsilon, b_\varepsilon \in I$ mit $f(a_\varepsilon) \le a+\varepsilon$ und $f(b_\varepsilon) \ge b-\varepsilon$. Der Zwischenwertsatz impliziert deshalb

$$(a,b) = \bigcup_{\varepsilon>0} [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{\varepsilon>0} [f(a_\varepsilon), f(b_\varepsilon)] \overset{ZWS}{\subseteq} f(I) \subset [a,b].$$

□

Unser nächstes Ziel ist es, die Umkehrfunktion einer gegebenen stetigen Funktion (sofern sie denn existiert) auf Stetigkeit zu untersuchen. Hierzu führen wir zunächst die folgenden Begriffe ein.

1.12 Definition. Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt
monoton steigend, falls $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$,
streng monoton steigend, falls $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
monoton fallend, falls $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$,
streng monoton fallend, falls $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
monoton, falls f monoton steigend oder monoton fallend,
streng monoton, falls f streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

Wir erinnern an dieser Stelle auch nochmals an die Definition der Injektivität einer Funktion: eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *injektiv*, falls $f(x_1) = f(x_2)$ immer

$x_1 = x_2$ impliziert. Insbesondere ist eine streng monotone Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv und es ist möglich die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(D) \to D$ via der folgenden Vorschrift zu definieren:

$$f^{-1} : f(D) \to D, f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow y = f(x).$$

Der Graph $Graph(f^{-1})$ von f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Graphen $Graph(f)$ von f an der Geraden $x = y$, und es gilt

$$Graph(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f^{-1}(D)\} = \{(f(x), x) : x \in D\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun der Frage nach, ob die Umkehrfunktion einer streng monotonen und stetigen Funktion wiederum stetig ist.

1.13 Satz. *Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f^{-1}(I) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. OBdA sei f streng monoton wachsend. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.
1. Zunächst ist $f(I) =: J$ ein Intervall nach dem obigen Satz 1.11 und wir setzen $g := f^{-1} : J \to I$.
2. Die Funktion g ist streng monoton wachsend, denn seien $s_1 < s_2$ in J, so folgt $g(s_1) < g(s_2)$. Ansonsten wäre $g(s_1) \geq g(s_2)$ und die Monotonie von f würde $s_1 = f(g(s_1)) \geq f(g(s_2)) = s_2$ implizieren. Widerspruch!
3. Die Umkehrfunktion g ist stetig. Zum Beweis nehmen wir an, dass die Funktion g in $s_0 \in J$ unstetig sei. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(s_n) \subset J$ mit

$$|s_n - s_0| < \frac{1}{n} \text{ und } |g(s_n) - g(s_0)| \geq \varepsilon_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deshalb ist $s_n \in [s_0 - 1, s_0 + 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da g eine monotone Funktion ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $t_n := g(s_n) \in [a, b]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert t_0. Da f stetig ist, konvergiert $f(t_{n_k})$ für $k \to \infty$ gegen $f(t_0)$. Andererseits gilt $f(t_{n_k}) = s_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ und die Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert $s_0 = f(t_0)$. Deshalb gilt

$$g(s_{n_k}) = t_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0 = g(s_0),$$

im Widerspruch zur obigen Eigenschaft der Folge $(g(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer Reihe von Beispielen.

1.14 Beispiele. a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt[n]{x}$ stetig und streng monoton wachsend. Um diese Tatsache einzusehen, betrachte man die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty), t \mapsto t^n$. Dann ist g stetig und streng monoton wachsend, denn für $0 \leq s < t$ gilt

$$g(t) - g(s) = t^n - s^n = t^n(1 - (\frac{s}{t})^n) > 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus obigem Satz 1.13.
b) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monton wachsend. Wir wiederholen das Argument aus der Bemerkung 1.10 c): da $e^{x+h}/e^x = e^h$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ gilt, folgt die strenge Monotonie der Exponentialfunktion aus der Abschätzung

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots > 1, \quad h > 0.$$

Ferner ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ nach Korollar 1.8 stetig. Der obige Satz über die Umkehrfunktion besagt dann, dass die Logarithmusfunktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log x$ definiert in Bemerkung 1.10 c) als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ebenfalls stetig ist.
c) Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *allgemeine Potenz* als

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log x).$$

Dann sind die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_x(\alpha) &:= x^\alpha \qquad \text{für festes } x > 0 \text{ und} \\ g_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g_\alpha(x) &:= x^\alpha \qquad \text{für festes } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

stetig. Wir notieren an dieser Stelle, dass die obige Definition die bisherige Definition der Potenz für rationale Exponenten aus Bemerkung II.1.14 auf beliebigen Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ fortsetzt. Um dies einzusehen, folgern wir für $x > 0$ und $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ aus der Eindeutigkeit der Wurzel, dass

$$\exp(\frac{p}{q} \log x) = \exp(\frac{\log x}{q})^p = (\sqrt[q]{\exp(\log x)})^q = (\sqrt[q]{x})^p$$

gilt.
d) Ist $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, so ist $f^{-1} : f(D) \to D$ im allgemeinen nicht stetig, falls D kein Intervall ist. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f : D = [0, 1) \cup \{2\}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{für } x = 2. \end{cases}$$

Dann ist f stetig und streng monoton, aber $f^{-1} : f(D) = [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{für } y \in [0, 1) \\ 2, & \text{für } y = 1 \end{cases}$$

ist unstetig in $y = 1$.