5 Potenzreihen

Potenzreihen haben eine lange Tradition in der Analysis. Stellt man zum Beispiel eine Funktion f in der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ dar, so spricht man von der Entwicklung einer Funktion f in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0. Die allgemeine Theorie solcher Entwicklungen werden wir erst später in der Vorlesung „Funktionentheorie“ noch genauer kennenlernen, wo die volle Bedeutung der Potenzreihen als wichtiges Werkzeug der Analysis zum Vorschein kommt.

Neben diesen grundsätzlichen Eigenschaften, interessieren wir uns für Potenzreihen auch deswegen, da ihre Konvergenztheorie durch den sogenannten Konvergenzradius beschrieben werden kann. Wir beginnen mit der folgenden Definition.

5.1 Definition. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Potenzreihe.

Wir gehen im Folgenden der Frage nach, für welche $z \in \mathbb{C}$ die obige Reihe konvergiert und führen hierzu den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe ein.

5.2 Definition. Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ heißt

$$\varrho := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ gesetzt ist. Diese Definition des Konvergenzradius heißt auch *Formel von Cauchy-Hadamard.*

Wir bezeichnen im Folgenden die Menge

$$B_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$$

als den *Konvergenzkreis* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Das folgende Theorem bildet das Hauptresultat dieses Abschnitts.

5.3 Theorem. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ϱ. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:*

a) Ist $|z| < \varrho$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent.

b) Ist $|z| > \varrho$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent.

c) Ist $|z| = \varrho$, so ist keine Aussage zur Konvergenz möglich.

Beweis. Der Beweis ist nur eine Anwendung des Wurzelkriteriums. Da $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$ gilt, folgt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z| < \varrho.$$

Das Wurzelkriterium 3.14 impliziert daher die Aussage des Satzes, d.h. es gilt

a) $|z| < \varrho \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut.

b) $|z| > \varrho \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert.

c) $|z| = \varrho \Longrightarrow$ keine Aussage ist möglich.

□

5.4 Bemerkung. Neben dem Wurzelkriterium kann auch das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius verwandt werden. Genauer gesagt, sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: q$$

gilt. Dann besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{q}$. Zum Beweis notieren wir, dass

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \to q|z|, \quad (n \to \infty)$$

gilt. Ist $0 < q < \infty$, so wählen wir $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1/q$ und $|z_2| > 1/q$ und das Quotientenkriterium impliziert, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ absolut konvergiert, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ hingegen divergiert. Nach Theorem 5.3 gilt somit $\varrho = 1/q$. Die Fälle $q = 0$ und $q = \infty$ werden ähnlich bewiesen.

5.5 Beispiele. a) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $\varrho = \infty$, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

und nach obiger Bemerkung 5.4 ist $\varrho = \frac{1}{q} = \infty$.
b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $\varrho = 0$, denn es ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n = \infty,$$

und daher $\varrho = 0$.
c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ hat den Konvergenzradius $\varrho = e$. Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.