4 Umordnungen und Produkte von Reihen

Summieren wir endliche viele reelle oder komplexe Zahlen, so hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Summation ab, d.h. eine beliebige Umordnung der Summanden führt zur gleichen Summe. Völlig anders stellt sich die Situation bei unendlichen Reihen dar. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass es hier durch Umordnen der Summanden möglich ist, den Reihenwert zu ändern oder dass man durch Umordnen sogar konvergente Reihen in divergente Reihen überführen kann. Dieser, auf den ersten Blick, sehr überraschende Sachverhalt tritt jedoch nicht bei absolut konvergenten Reihen auf. Nicht zuletzt deswegen ist der im vorigen Abschnitt eingeführte Begriff der absoluten Konvergenz so wichtig. Für eine präzise Beschreibung der Situation müssen wir natürlich zunächst den Begriff einer Umordnung definieren. Wir beginnen mit einem Beispiel und betrachten die alternierende harmonische Reihe

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2j}+\ldots,$$

sowie einer Umordnung hiervon, welche durch

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}+\ldots$$

gegeben ist. Wir bezeichnen mit s_n bzw. t_n die n-te Partialsumme der ursprünglichen bzw. der umgeordneten Reihe und setzen $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
s_2 &= \tfrac{1}{2} & 2t_3 &= 2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\\
s_4 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4} & 2t_6 &= \tfrac{1}{2} + \underbrace{2(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\\
s_6 &= \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}) & 2t_9 &= \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\underbrace{2(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})}_{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}},
\end{aligned}$$

und wegen $\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2j})$, folgt $2t_{3n}=s_{2n}$ für alle $n\geq 1$. Da die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s konvergiert und die Glieder der umgeordenten Reihe gegen 0 konvergieren, existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N_0\in\mathbb{N}$, so dass zugleich $|t_{3n}-\frac{s}{2}|<\frac{\varepsilon}{2}$ und $|t_{3n+1}-t_{3n}|<\frac{\varepsilon}{2}$ und $|t_{3n+2}-t_{3n}|<\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n\geq N_0$ gilt. Daraus folgt $|t_m-\frac{s}{2}|<\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m>3N_0+2$, welches bedeutet, dass die umgeordnete Reihe gegen $s/2$ konvergiert! Dieses Beispiel motiviert die folgende Definition.

4.1 Definition. Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und $\varphi:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt $\sum_{n=0}^\infty a_{\varphi(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$. Ferner heißt die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *unbedingt konvergent*, falls jede Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ den gleichen Grenzwert besitzt.

4.2 Satz. *Eine absolut konvergente Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist unbedingt konvergent.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j$ die n-te Partialsumme der gegebenen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und für eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei $t_n := \sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)}$ die n-te Partialsumme einer Umordnung. Wir zeigen, dass $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s konvergiert wobei s den Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Nach Voraussetzung ist die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, d.h. für $\varepsilon > 0$ exisitiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus diesem Grunde gilt

$$\Big|s - \sum_{j=0}^{N_0-1} a_j\Big| = \Big|\sum_{j=N_0}^{\infty} a_j\Big| \le \sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählt man nun $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1\} \subset \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(N_1)\}$ gilt, so folgt für alle $m \ge N_1$

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} a_{\varphi(j)} - s\Big| \le \Big|\sum_{j=0}^{m} a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{N_0-1} a_j\Big| + \underbrace{\Big|\sum_{j=0}^{N_0-1} a_j - s\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \le \sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge der Partialsummen (t_m) der umgeordneten Reihe ebenfalls gegen s und die Aussage ist bewiesen.

□

Der folgende auf Riemann zurückgehende Satz ist ziemlich überraschend.

4.3 Satz. (Riemannscher Umordnungssatz). *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann existiert zu jedem* $b \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung der Reihe, welche gegen* b *konvergiert.*

Der Riemannsche Umordnungssatz impliziert die sehr bemerkenswerte und überraschende Tatsache, dass man in einer konvergenten Reihe, welche nicht absolut konvergiert, nur höchstens endlich viele Summanden umordnen darf: ansonsten ergibt der Begriff einer konvergenten Reihe keinen Sinn mehr! Der obige Satz 4.2 hingegen besagt, dass der Wert einer absolut konvergenten Reihe invariant unter Umordnungen ist.

Den Riemannschen Umordnungssatz werden wir an dieser Stelle nicht beweisen und verweisen in diesem Zusammenhang zum Beispiel auf das Buch von Mangold/Knopp.

Wir wollen im Folgenden zwei konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ miteinander multiplizieren und betrachten hierzu das Produkt

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots)(b_0 + b_1 + \ldots).$$

Ausmultiplizieren ergibt, dass wir Terme der folgenden Form aufsummieren müssen:

$$\begin{array}{lllll}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots &
\end{array}$$

Es stellt sich dann die Frage in welcher Reihenfolge die Summanden aufsummiert werden sollen. Insbesondere fragen wir nach Bedingungen, welche eine Darstellung der Produktreihe in der Form

$$(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

mit Summanden der Gestalt

$$p_j = a_l b_m \qquad \text{für } l, m \in \mathbb{N}$$

garantieren. Wir skizzieren zwei mögliche Reihenfolgen der Summation:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 1 & & 3 & & 6 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
2 & & 4 & & 7 & & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & \\
5 & & 8 & & & & \\
 & \swarrow & & & & & \\
9 & & & & & &
\end{array}
\qquad \text{oder} \qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & 1 & & 4 & & 9 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
3 & \leftarrow & 2 & & 5 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
8 & \leftarrow & 7 & \leftarrow & 6 & &
\end{array}$$

und nennen eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ eine *Produktreihe* von $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$, falls die Folge $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ genau aus den Produkten $a_l b_m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ besteht; genauer gesagt, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $a_l b_m = p_{\varphi(l,m)}$ für alle $l, m \in \mathbb{N}$.

4.4 Satz. *Sind $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen, so konvergiert jede ihrer Produktreihen gegen*

$$(\sum_{j=0}^{\infty} a_j) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j).$$

Beweis. Es sei $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ eine beliebige Produktreihe der Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=0}^{n} |p_j| \leq \sum_{j=0}^{m} |a_j| \sum_{j=0}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.$$

Wir folgern aus Bemerkung 3.5, dass $\sum_{j=0}^{\infty} |p_j|$ konvergiert. Ferner folgt aus Bemerkung 3.12, dass auch $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ konvergiert und Satz 4.2 impliziert, dass die Konvergenz unbedingt (d.h. unabhängig von der gewählten Reihenfolge) ist. Dies bedeutet dass *jede* Produktreihe gegen ein und dasselbe $s \in \mathbb{C}$ konvergiert.

$\square$

Wir betrachte nun spezielle Produktreihen, in welchen die Reihenfolge der Summation durch das folgende Schema vorgegeben ist:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1b_0 & \leftarrow & a_1b_1 & & a_1b_2 & \cdots \\ & & & & \downarrow & \\ a_2b_0 & \leftarrow & a_2b_1 & \leftarrow & a_2b_2 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} q_0 & & q_1 & & q_4 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ q_3 & \leftarrow & q_2 & & q_5 \\ & & & & \downarrow \\ q_8 & \leftarrow & q_7 & \leftarrow & q_6 \end{array}$$

Es gilt also

$$q_0 + q_1 + \ldots + q_{(n+1)^2-1} = \underbrace{(a_0 + \cdots + a_n)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} a_j} \underbrace{(b_0 + \cdots + b_n)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} b_j},$$

was die Behauptung impliziert.

$\square$

Wählen wir für die Summation die folgende Reihenfolge

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ a_1b_0 & & a_1b_1 & & \\ & \swarrow & & & \\ a_2b_0 & & & & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccccc} p_0 & & p_1 & & p_3 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ p_2 & & p_4 & & \\ & \swarrow & & & \\ p_5 & & & & \end{array}$$

und setzen wir $c_0 := a_0b_0$, $c_1 := a_0b_1 + a_1b_0$ und allgemeiner

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

so erhalten wir das folgende Korollar.

4.5 Korollar. (Cauchyprodukt von Reihen). *Es seien* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *und* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *absolut konvergente Reihen und sei*

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut und es gilt*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die obige Folgerung 4.5 im Allgemeinen für Reihen, welche nur konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, nicht richtig ist.

Zum Abschluss des Abschnitts betrachten wir die *Exponentialreihe*, welche durch

$$\exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

gegeben ist. Das Quotientenkriterium 3.15 kombiniert mit dem Beispiel 3.16 impliziert, dass $\exp(z)$ eine für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergente Reihe ist. Ferner gilt die wichtige *Funktionalgleichung* der Exponentialreihe.

4.6 Korollar. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w).$$

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung des oben bewiesenen Cauchyprodukts von Reihen. In der Tat gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &\overset{\text{Def.}}{=} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\Big) \overset{\text{Cauchyprodukt 4.5}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j w^{n-j} \overset{\text{Bin. Satz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \exp(z+w).
\end{aligned}$$

□

Die Funktionalgleichung der Exponentialreihe impliziert unmittelbar weitere Eigenschaften der Exponentialreihe.

4.7 Korollar.

a) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. *Insbesondere ist* $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

b) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$.

c) *Für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(m) = e^m$.

d) *Für alle* $q \in \mathbb{Q}$ *gilt* $\exp(q) = e^q$.

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.