3 Unendliche Reihen

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, wobei wiederum $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt. Wir gehen in diesem Abschnitt der Frage nach, unter welchen Bedingungen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Natürlich müssen wir zunächst präzisieren, was wir unter einer Reihe und deren Konvergenz beziehungsweise Divergenz verstehen und beginnen deshalb mit der folgenden Definition.

3.1 Definition. a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir nennen das Symbol

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

eine *unendliche Reihe mit Gliedern a_n*.
b) Weiter heißt $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j, n \in \mathbb{N}_0$, die *$n$-te Partialsumme* der Reihe.
c) Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $s \in \mathbb{K}$, so heißt die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *konvergent* und wir setzen $s := \sum_{j=0}^{\infty} a_j$. Andernfalls, heißt die Reihe *divergent*.

3.2 Beispiele. a) Die *geometrische Reihe*. Es sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q},$$

denn $s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j \overset{1.11\,\text{b)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{1.7b)}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{1-q}$.
b) Die *harmonische Reihe*. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent. Betrachtet man die Differenz der Partialsummen $s_{2n} - s_n$ für $n \geq 1$, so gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Dies bedeutet, dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist und somit die harmonische Reihe divergiert.

c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

In der Tat gilt $\frac{1}{j(j+1)} = \underbrace{\frac{j}{j+1}}_{=:c_j} - \underbrace{\frac{j-1}{j}}_{=:c_{j-1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Setzen wir $c_n := \frac{n}{n+1}$, so ist

$$c_n = c_0 + \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1})$$

eine sogenannte *Teleskopsumme* und es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Analog zur Situation von Folgen, in welcher das Cauchykriterium 2.11 ein inneres Kriterium für die Konvergenz einer Folge darstellte, existiert auch für Reihen ein solches inneres Kriterium. Genauer gilt das folgende Lemma.

3.3 Lemma. (Cauchykriterium für Reihen). *Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\Big|\sum_{j=n}^{m} a_j\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

Beweis. Der Beweis ist einfach. Da $|\sum_{j=n}^{m} a_j| = |s_m - s_{n-1}|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N_0$ gilt, folgt die Behauptung aus dem Cauchykriterium für Folgen; vgl. Theorem 2.11. □

Wählen wir in obigem Lemma 3.3 speziell $n = m$, so folgt, dass die Glieder einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge bilden. Wir halten diesen wichtigen Sachverhalt explizit im folgenden Korollar fest.

3.4 Korollar. *Es sei $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ eine konvergente Reihe. Dann ist $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$.*

Das Beispiel der harmonische Reihe zeigt, dass die Umkehrung von Korollar 3.4 nicht gilt.

3.5 Bemerkung. Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit positiven Folgengliedern, d.h. es gelte $a_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Beweis. Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine konvergente Reihe, welches bedeutet, dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Satz 1.6 impliziert nun, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
Umgekehrt ist $(\sum_{j=1}^{n} a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge, da $a_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, welches nach Satz 1.12 bedeutet, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

□

3.6 Beispiel. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ und zeigen im Folgenden, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

gilt, wobei die Zahl e bereits in Satz 1.15 als $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ definiert wurde.
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$. Der Beweis von Satz 1.15 impliziert, dass $a_n \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \leq 3$ für alle $n \geq 1$ gilt. Deswegen ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

beschränkt und die obige Bemerkung 3.5 impliziert, dass $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert der Reihe mit $e' := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$. Lemma 1.9 impliziert, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e'$ gilt. Also gilt $e \leq e'$.
Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung: $e \geq \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. In der Tat gilt für $n > m \geq 1$

$$a_n \overset{\text{Binom.Satz}}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \geq \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \overbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdots \underbrace{\frac{n-j+1}{n}}_{\to 1}}_{\to 1 (n\to\infty)}}^{\text{j-Faktoren}}.$$

Nach Lemma 1.9 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = e \geq \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}$, also $e \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} = e'$.
Zusammenfassend gilt also $e' = e$ und die obige Behauptung ist bewiesen.
Um Abschätzungen für die Eulersche Zahl e zu gewinnen, betrachte

$$d_{n,k} := s_{n+k} - s_n, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq d_{n,k} \leq \frac{s_k - 1}{(n+1)!};$$

für $k \to \infty$ ergibt sich somit

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{e-1}{(n+1)!}. \tag{3.1}$$

Obige Abschätzung liefert für $n = 2$ nicht nur die Abschätzung $2,66 < e < 2,8$, sondern sie ist auch Grundlage für den folgenden Beweis der Irrationalität der Eulerschen Zahl e.

3.7 Satz. *Die Eulersche Zahl e ist irrational.*

Beweis. Wir nehmen an, dass e rational wäre. Dann könnte man e in der Form $e = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Betrachtet man die obige Abschätzung (3.1) für $n = q$ und multipliziert diese Ungleichung mit $q!$, so folgt

$$0 < \frac{1}{q+1} \leq p(q-1)! - q!s_q < \frac{2}{q+1} \leq 1,$$

und somit

$$0 < p(q-1)! - q!s_q < 1.$$

Da jedoch $p(q-1)! - q!s_q \in \mathbb{Z}$ gilt, ist dies unmöglich und wir erhalten einen Widerspruch.

□

Wir untersuchen im Folgenden die Konvergenz von Reihen, deren Folgenglieder alternierende Vorzeichen haben und beginnen mit dem Konvergenzkriterium von Dirichlet.

3.8 Satz. (Konvergenzkriterium von Dirichlet). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Folge derart, dass die Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{j=1}^{n} a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Ferner sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j$ konvergent.*

Ein wichtige Folgerung hieraus ist das sogenannte Leibniz-Kriterium.

3.9 Korollar. (Leibniz-Kriterium). *Es sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \varepsilon_j$.*

3.10. Beispiele und Bemerkungen. a) Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

ist konvergent und heißt *alternierende harmonische Reihe*. Wir zeigen in Analysis II, dass der Grenzwert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{j+1}$ gleich $\log 2$ ist.

b) Eine Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j$ mit $a_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ heißt *alternierend.*

Beweis von Satz 3.8. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ setze

$$\sigma_{n,m} := \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j a_j.$$

Die Voraussetzung besagt, dass $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ gilt. Nach Lemma 3.3 (dem Cauchykriterium) genügt es also zu zeigen, dass eine Konstante $M > 0$ existiert mit

$$|\sigma_{n,m}| \leq M\varepsilon_n \quad \text{für alle } \ n, m \geq 1.$$

Wir setzen $C := \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$. Für $m \geq n \geq 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m} &= \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j a_j = \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j s_j - \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j \ s_{j-1} \\ &= \sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j s_j - \sum_{j=n-1}^{m-1} \varepsilon_{j+1} s_j = \sum_{j=n}^{m-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) s_j + \varepsilon_m s_m - \varepsilon_n s_{n-1}. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} |\sigma_{n,m}| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \underbrace{(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})}_{\geq 0} |s_j| + \varepsilon_m |s_m| + \varepsilon_n |s_{n-1}| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) C + \varepsilon_m C + \varepsilon_n C \\ &= (\varepsilon_n - \varepsilon_m) C + \varepsilon_m C + \varepsilon_n C = 2\varepsilon_n C = M\varepsilon_n \end{aligned}$$

mit $M := 2C$ und die Behauptung folgt aus dem Cauchykriterium 3.3.

□

Ein sehr wichtiger Konvergenzbegriff von Reihen ist der der absoluten Konvergenz.

3.11 Definition. (Absolute Konvergenz). Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ konvergiert.

3.12 Bemerkung. Wir folgern aus dem Cauchykriterium für Reihen, Lemma 3.3, dass jede absolut konvergente Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert. In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $|\sum_{j=n}^{m} a_j| \le \sum_{j=n}^{m} |a_j|$ für alle $m \ge n$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.3.

3.13 Satz. (Majorantenkriterium). *Es seien $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $|a_j| \le b_j$ für fast alle $j \in \mathbb{N}_0$. Konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$, so ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.*

In der obigen Situation heißt die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ eine *Majorante* von $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$.

Der Beweis von Satz 3.13 ist wiederum einfach. Da $\sum_{j=n}^{m} |a_j| \le \sum_{j=n}^{m} b_j$ für alle $m \ge n$ gilt, folgt die Behauptung aus dem Cauchykriterium, Lemma 3.3.

Beispiel. Nach Beispiel 3.2 c) konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$. Da $0 < \frac{1}{(j+1)^2} \le \frac{1}{j(j+1)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ konvergiert.

Wir wählen nun als Majorante speziell die geometrische Reihe und erhalten damit das sogenannte Wurzelkriterium.

3.14 Satz. (Wurzelkriterium). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*
a) Es existiere $0 < q < 1$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.

b) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis. a) Nach Voraussetzung existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für alle $n \ge N_0$. Also ist $|a_n| \le q^n$ für alle $n \ge N_0$, d.h. es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Die Behauptung folgt jetzt aus dem obigen Majorantenkriterium 3.13.
b) Die Voraussetzung besagt, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendliche viele $j \in \mathbb{N}$ gilt. Also ist $|a_n| \ge 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge, welches bedeutet, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

□

Beispiel. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^l}{2^n}$ ist konvergent für jedes $l \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung I. 1.14 und Beispiel 1.16 c) gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^l}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^l}{2} \longrightarrow \frac{1}{2};$$

also ist $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{2}{3} =: q < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung folgt aus dem obigen Wurzelkriterium.

In konkreten Fällen oft einfacher anzuwenden ist das folgende Quotientenkriterium.

3.15 Satz. (Quotientenkriterium).
a) Es gelte $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere $0 < q < 1$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

b) Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ für fast alle (nicht nur für unendlich viele) $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. a) Nach Voraussetzung existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \le q$ für alle $j \ge N_0$. Also gilt für alle $n \ge N_0 + 1$

$$\left|\frac{a_n}{a_{N_0}}\right| \overset{*}{=} \prod_{j=N_0}^{n-1} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \left|\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \overset{\text{Vor.}}{\le} q^{n-N_0}.$$

Daher ist $|a_n| \le \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} q^n$ für alle $n \ge N_0 + 1$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} q^n$$

ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Das Majorantenkriterium impliziert nun die Behauptung.
b) Die Voraussetzung und die obige Relation (*) implizieren, dass $\left|\frac{a_n}{a_{N_0}}\right| \ge 1$ für alle $n \ge N_0 + 1$ gilt. Deshalb ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent. □

3.16 Beispiel. Die *Exponentialreihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies ist klar für $z = 0$. Für $z \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}\frac{n!}{|z^n|} = \frac{|z|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. es gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun eine Variante des obigen Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums in der die Existenz einer Zahl q mit $0 < q < 1$ durch eine Bedingung an den Limes superior, bzw. Limes inferior ersetzt wird.

3.17 Satz. (Andere Formulierung des Wurzel- bzw. Quotientenkriterium).

a) Gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) Gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

c) Es seien $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. *Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

d) Gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

3.18 Bemerkungen. a) Gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, so kann man *keine* Aussage zur Konvergenz treffen! Betrachtet man zum Beispiel die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt nach Beispiel 1.16 c) und Bemerkung I. 1.14 für beide Folgen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und}$$
$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

aber die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent, während die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert.

b) Das Quotientenkriterium ist „schwächer " als das Wurzelkriterium, im Sinne, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

gilt.

Wir beenden diesen ersten Abschnitt über die Konvergenz von Reihen mit dem Verdichtungssatz von Cauchy.

3.19 Satz. (Verdichtungssatz von Cauchy). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ konvergiert } \Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} \text{ konvergiert.}$$

Der obige Satz besagt, dass sich das Konvergenzverhalten einer gegebenen Reihe vollständig aus dem der „verdichteten " Reihe ablesen lässt, welche jedoch nur Glieder mit den Indizes 2^j, also bedeutend weniger als die ursprüngliche Reihe, enthält.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Partialsummen der ursprünglichen Reihe $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$ und der verdichteten Reihe $t_n := \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$.
$''\Longrightarrow''$: Für $n \geq 2^j$ gilt wegen der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots + (a_{2^{j-1}+1} + \cdots + a_{2^j}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{j-1}a_{2^j} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 \cdots + 2^j a_{2^j}) = \frac{1}{2}t_j. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{j=0}^\infty a_j$ konvergent, d.h. es gilt $\sum_{j=0}^\infty a_j =: s$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $t_j \leq 2s$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und die Reihe $\sum_{j=0}^\infty 2^j a_{2^j}$ konvergiert nach der obigen Bemerkung 3.5.
$''\Longleftarrow''$: Für $n \leq 2^{j+1} - 1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_0 + a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^j} + \cdots + a_{2^{j+1}-1}) \\ &\leq a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^j a_{2^j} = a_0 + t_j. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{j=0}^\infty 2^j a_{2^j}$ konvergent, d.h. es gilt $\sum_{j=0}^\infty 2^j a_{2^j} =: t$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Also ist $s_n \leq a_0 + t$ für alle $n \geq 0$ und die Bemerkung 3.5 impliziert, dass die Reihe $\sum_{j=0}^\infty a_j$ konvergiert.

□

Der obige Satz impliziert, dass zum Beispiel die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha \in \mathbb{Q}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ gilt. Die zugehörige verdichtete Reihe ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j 2^{-j\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)j} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \quad \text{mit } q := 2^{1-\alpha}$$

ist eine geometrische Reihe und diese konvergiert nach Beispiel 3.2 a) genau dann, wenn $q < 1$ und somit $\alpha > 1$ ist. Man beachte, dass wir hier vorläufig n^α nur für $\alpha \in \mathbb{Q}$ definiert haben; später definieren wir n^α für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.
Die durch die konvergente Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

(vorläufig für $s \in \mathbb{Q}$) definierte Funktion, ist die berühmte *Riemannsche Zetafunktion*. Sie spielt bei Untersuchungen zur Primzahlverteilung eine herausragende Rolle. Wir werden später in der Vorlesung „Analysis II “beweisen, dass $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ gilt. Die bis heute ungelöste sogenannte Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion den Realteil $\frac{1}{2}$ haben.