2 Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Wir untersuchen im Folgenden nun den umgekehrten Sachverhalt, d.h. wir betrachten beschränkte Folgen und fragen nach der Existenz von konvergenten Teilfolgen. Betrachtet man das Beispiel der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$, so ist obige Frage leicht zu beantworten: es existieren mindestens zwei konvergente Teilfolgen, nämlich $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Der folgende Satz von Bolzano-Weierstraß gibt eine postive Antwort auf diese Frage im allgemeinen Kontext.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der formalen Definition einer Teilfolge einer gegebenen Folge.

2.1 Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion (d.h. $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann heißt die Folge $\big(a_{\varphi(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setzt man $\varphi(k) := n_k$, so schreiben wir auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Zur Erläuterung der Definition betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-1)^n$. Wählen wir in der obigen Definition $\varphi(n) = 2n$, so gilt $a_{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wählen wir hingegen $\varphi(n) = 2n+1$, so gilt $a_{2n+1} = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Lemma. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heiße klein, falls $a_n \leq a_l$ gilt für alle $l \geq n$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
a) Zu jeder Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert ein kleines $n > m$.
b) Es existiert $l \in \mathbb{N}$, so dass alle kleinen n kleiner als l sind.
zu a): Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi(1) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : n \text{ klein}\}, \\ \varphi(k+1) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : n \text{ klein und } \ n > \varphi(k)\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann ist φ nach Konstruktion eine streng monoton wachsende Funktion und die Folge $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
zu b) In diesem Fall existiert für alle $m \geq l$ ein $j > m$ mit $a_j < a_m$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi(1) &:= l, \\ \varphi(k+1) &:= \min\{j \in \mathbb{N} : j > \varphi(k) \text{ und } a_j < a_{\varphi(k)}\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann ist φ streng monoton wachsend und die Folge $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

□

2.3 Theorem. (Bolzano-Weierstraß, 1. Fassung). *Jede beschränkte Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Für den Fall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.2 und Satz 1.12.
Wir betrachten im Folgenden also eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und nach der obigen Aussage für reelle Folgen, besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Re} a_{\varphi_1(k)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner ist $(\operatorname{Im} a_{\varphi_1(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Wiederum existiert nach der obigen Ausage eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Im} a_{\varphi_2\circ\varphi_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Setzen wir $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, so ist φ streng monoton wachsend und $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Um die obige Ausage des Satzes von Bolzano-Weierstraß noch aus anderen Perspektive zu verstehen, führen wir an dieser Stelle den Begriff des Häufungspunktes einer Folge ein.

2.4 Definition. (Häufungspunkt). Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a - a_n| < \varepsilon$.

2.5 Beispiele. a) Es sei $a_n = (\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots)$. Dann ist $a = 0$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber divergent.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (i^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots)$ besitzt 4 Häufungspunkte, nämlich $1, i, -1, -i$.

c) Es sei $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte und auch keine konvergente Teilfolge.

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ den Körper der rellen oder komplexen Zahlen, d.h. es gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.6 Bemerkungen. a) Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ setze $U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{K} : |a - z| < \varepsilon\}$. Dann heißt $U_\varepsilon(a)$ eine *ε-Umgebung von a*.

b) Eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder a_n enthält, d.h. alle bis auf endlich viele.

c) Eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält.

2.7 Lemma. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann ist a genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Beweis. $\Rightarrow$: Die Bemerkung 2.6 c) impliziert, dass für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen. Setze $n_1 := 0$ und wähle für alle $k > 1$ ein $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$. Dann ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und es gilt $|a - a_{n_k}| < \frac{1}{k}$ für alle $k \geq 1$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

$\Leftarrow$: Sei $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Dann enthält $U_\varepsilon(a)$ für alle $\varepsilon > 0$ fast alle a_{n_k} für $k \in \mathbb{N}$, also unendlich viele, vgl. die Bemerkung 2.6 b) und c).

□

2.8 Theorem. (Bolzano-Weierstraß, 2. Fassung). *Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt. Ferner besitzt die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Minimum r und ein Maximum s.*

In der obigen Situation setzen wir

$$\begin{aligned} r &:= \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw. } \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ \textit{(Limes Inferior)},\\ s &:= \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw. } \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ \textit{(Limes Superior)}. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $H := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$. Dann gilt

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq h \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{für alle} \quad h \in H.$$

Ferner impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß in der ersten Fassung 2.3 sowie Lemma 2.7, dass $H \neq \emptyset$ gilt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $s := \sup H$. Es ist noch zu zeigen, dass $s \in H$ gilt. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach der Charakterisierung des Supremums gegeben in Satz I.1.22 existiert ein $a \in H$ mit

$$a \leq s < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt also $|s - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ gilt dann

$$|s - x| \leq |s - a| + |a - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subset U_\varepsilon(s)$. Nun enthält $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ unendlich viele a_n, also auch $U_\varepsilon(s)$. Die Bemerkung 2.6 impliziert damit, dass $s \in H$ gilt.
Der Beweis für den Limes Inferior verläuft analog.

□

2.9 Beispiele. a) Wir betrachten wiederum die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt klarerweise $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
b) Wir betrachten die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{9}{5}, \ldots$$

welche formal gegeben ist durch

$$a_n = \frac{j}{k+1} \quad \text{für } n = k^2 + j, \quad j = 1, 2, \ldots, 2k+1, k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann kommt jede rationale Zahl q mit $0 < q < 2$ in dieser Folge (sogar unendlich oft) vor und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$. Ferner ist jedes x mit $0 \leq x \leq 2$ ein Häufungspunkt der obigen Folge. Insbesondere besitzt diese Folge also unendliche viele Häufungspunkte.

Bisher hatten wir die Konvergenz einer Folge nur für den Fall untersucht, dass der Grenzwert explizit bekannt war. Eine Ausnahme bildete nur der Satz 1.12. Wir betrachten nun ein sogenanntes "inneres" Kriterium.

2.10 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt *Cauchyfolge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n, m \geq N_0.$$

2.11 Theorem. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wennn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_0$, also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n, m \geq N_0.$$

$\Leftarrow$: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte:
a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Um dies zu zeigen, wähle $m_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq m_0$. Dann gilt $|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq m_0$. Also ist $|a_n| \leq 1 + |a_{m_0}|$ für alle $n \geq m_0$. Daher gilt $|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m_0-1}|, 1 + |a_{m_0}|\}, n \in \mathbb{N}$, und somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.
b) Der Satz von Bolzano-Weierstraß in der ersten Fassung impliziert, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
c) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Voraussetzung impliziert, dass ein $m_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq m_1$. Nach dem Schritt b) gilt $|a - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n_k > m_1$. Also gilt für alle $n \geq m_1$

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

d.h. $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

□

2.12 Bemerkungen. a) Die Tatsache, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ konvergiert, heißt auch *Vollständigkeit* von $\mathbb{K}$.
b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert in Abschnitt I.1 ist nicht vollständig!
c) Es gilt

Vollständigkeitsaxiom	$\iff$	Archimedisches Prinzip und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$
	$\iff$	Archimedisches Prinzip und Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$

d) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $q \neq 1$ und $|q| = 1$ setzen wir $a_n := q^n$. Dann gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = |q|^n |q - 1| = |q - 1| > 0 \quad \text{für alle}\, n \geq 1.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Wir haben also gezeigt, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent ist, falls $|q| < 1$ oder $q = 1$ gilt.

Wir führen folgende *Notation* ein: für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ setzen wir

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

und nennen dies das abgeschlossene Intervall $[a, b]$.

2.13 Theorem. (Banachscher Fixpunktsatz). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Abbildung. Es existiere ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und*

$$|f(x) - f(y)| < q|x - y| \quad \textit{für alle} \quad x, y \in [a, b]. \tag{2.1}$$

Dann existiert genau ein $r \in [a, b]$ mit $f(r) = r$. Dies bedeutet, dass r ein Fixpunkt von f ist.

2.14 Bemerkung. Eine Abbildung, welche die obige Bedingung (2.1) erfüllt, heißt *strikte Kontraktion*.

Beweis. Für ein $x_0 \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:
a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.
Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$|x_m - x_{m-1}| \leq q^{m-1}|x_1 - x_0|, \quad m \geq 1,$$

via Induktion. Der Induktionsanfang $m = 1$ ist klar. Sei die Behauptung also für m schon bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_m| &= |f(x_m) - f(x_{m-1})|, \\ &\overset{\text{Vor.}}{\leq} q|x_m - x_{m-1}|, \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{\leq} qq^{m-1}|x_1 - x_0| = q^m|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Also gilt für $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|, \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^n)|x_1 - x_0|, \\ &\overset{\text{geom. Reihe}}{=} q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}|x_1 - x_0| = \frac{q^n - q^m}{1 - q}|x_1 - x_0| \leq \frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Da $0 < q < 1$ folgt aus Bemerkung 2.12c), dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und Theorem 2.11 impliziert, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir setzen $r := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
b) Es gilt $f(r) = r$.
Um dies zu zeigen sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|r - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $N \geq N_0$, also

$$\begin{aligned} |f(r) - r| &\leq |f(r) - x_{n_0+1}| + |x_{n_0+1} - r|, \\ &\overset{\text{Def.}}{=} |f(r) - f(x_{n_0})| + |x_{n_0+1} - r|, \\ &\leq q|r - x_{n_0}| + |x_{n_0+1} - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die klassische Schlussweise der Analysis aus Kapitel I.1.23 impliziert, dass $f(r) = r$ gilt.
c) Der Fixpunkt r ist eindeutig bestimmt.
Wir nehmen an, dass ein $r' \in [a, b]$ existiere mit $f(r') = r'$. Dann gilt

$$|r - r'| = |f(r) - f(r')| \leq q|r - r'|.$$

Hieraus folgt $(1 - q)|r - r'| = 0$, welches $|r - r'| = 0$ und wiederum $r = r'$ impliziert.
□

2.15 Bemerkungen.
a) Der obige Beweis ist konstruktiv, d.h. wir konstruieren den Fixpunkt r als $r = \lim_{n\to\infty} f^n(r)$ mit $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.
b) Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned} |r - x_n| &\leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \quad \textit{a-priori-Abschätzung,} \\ |r - x_n| &\leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \quad \textit{a-posteriori-Abschätzung.} \end{aligned}$$

c) Der Banachsche Fixpunktsatz gilt auch, falls [a,b] durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird.
d) Eine Verallgemeinerung des Satzes auf vollständige metrische Räume wird in der Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen” wichtig sein.