II Konvergenz von Folgen und Reihen

Viele der grundlegenden Sätze über Folgen und unendliche Reihen, welche wir im Folgenden untersuchen, gehen auf AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), einen der bedeutendsten französischen Mathematiker seiner Zeit, zurück. Lagrange sagte über den zwölfjährigen Cauchy, der schon als Schüler ob seiner außergewöhnlichen mahematischen Begabung auffiel: „Vous voyez ce petit jeune homme, eh bien! il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres“ und empfahl seinem Vater: „Lassen Sie dieses Kind vor dem siebzehnten Lebensjahr kein mathematisches Buch anrühren. Wenn Sie sich nicht beeilen, ihm eine gründliche literarische Ausbildung zu geben, so wird seine Neigung ihn fortreißen“. Cauchy wurde 1816 als Professor an der École Polytechnique in Paris berufen und seine drei großen Lehrbücher *Cours d'Analyse, Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Leçons sur le calcul différentiel* waren zentrale Wegbereiter zur modernen Strenge der Analysis. Im *Cours d'Analyse* wird die Theorie der unendlichen Reihen in einer Systematik entwickelt, die heute noch als vorbildhaft gelten kann.

Die von Cauchy benutzten unendlich kleinen Größen wurden von KARL WEIERSTRASS (1815-1897) durch eindeutige und klare, in Ungleichungen ausgedrückte Formulierungen, ersetzt. Sehr hilfreich war auch eine standardisierte Buchstabenwahl: ε als beliebig kleine positive Zahl (wahrscheinlich abgeleitet von erreur) und δ als die zu ε gehörende Zahl. Ab 1864 lehrte er als Professor an der Berliner Universität. In seinen Vorlesungszyklen behandelt er die Konvergenz von Folgen und Reihen und allgemeiner die Infinitesimalrechnung in „Weierstraßscher Strenge“ und wurde so zum Vater der „Epsilontik“, welche heute in allen Vorlesungen über Analysis Standard ist.

1 Konvergenz von Folgen

Wir beginnen dieses für die Vorlesung und den weiteren Aufbau der Analysis sehr wichtige Kapitel über Konvergenz von Folgen und Reihen mit einigen Vorbemerkungen über Funktionen und deren Eigenschaften.

1.1 Vorbemerkungen. a) Es seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* oder eine *Abbildung* $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ in *eindeutiger Weise* ein Element $y \in Y$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x).$$

b) Die Menge $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ heißt der *Graph* von f.

c) Zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ heißen gleich, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

d) Die Menge $Abb(X, Y)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen $f : X \to Y$.

e) Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt X *Definitionsbereich von f* und $f(X)$ der *Bildbereich von f* . Ferner heißt

   f *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

   f *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt.

   f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

f) Gilt $Y \subset \mathbb{R}$ bzw. $Y \subset \mathbb{C}$, so heißt f *reellwertige* bzw. *komplexwertige* Funktion.

Es sei M eine Menge. Wir nennen eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ die jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n zuordnet, eine *Folge in M* . Setzt man $a_n := f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gilt $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Folge*; gilt analog $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexe Folge*. Gelegentlich ist es nützlich, die Folge mit a_0 zu beginnen. In diesem Fall betrachtet man eine Folge dann als Abbildung $\mathbb{N}_0 \to M$ und wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Setzen wir $a_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, so entsteht die Folge $-1, 1, -1, \ldots$. Ferner liefert die Vorschrift $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

1.2 Definition. (Konvergenz von Folgen). Eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

In Quantoren geschrieben bedeutet dies

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_0.$$

Die Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folge* , andernfalls *divergente Folge* . Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge*.

Geometrische Deutung:

1.3 Bemerkungen. a) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, d.h. gilt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^*$ und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_*$ für $a^* \in \mathbb{C}$ und $a_* \in \mathbb{C}$, so folgt $a^* = a_*$.
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existieren $N_0^1, N_0^2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0^1$$
$$|a_n - a_*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0^2.$$

Da $a_1 - a_2 = a_1 - a_n + a_n - a_2$ folgt

$$0 \leq |a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_n| + |a_n - a_2| < \varepsilon \quad \text{für alle } \; n \geq \max\{N_0^1, N_0^2\},$$

d.h. es gilt $|a_1 - a_2| = 0$ und somit $a_1 = a_2$ wegen der klassischen Schlussweise der Analysis I.1.23.
b) Falls a_n nur definiert ist für $n \geq N$ für ein gewisses $N \in \mathbb{N}$, so bezeichnet man $(a_N, a_{N+1}, \dots)$ auch als Folge und wir schreiben $(a_n)_{n\geq N}$.

1.4 Beispiele. a) Für $a \in \mathbb{C}$ konvergiert die konstante Folge $(a, a, \dots)$ offensichtlich gegen a.

b) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.
Um dies zu verifizieren, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip I.1.23 existiert eine Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \cdot \varepsilon > 1$. Also gilt

$$\Big|\frac{1}{n} - 0\Big| \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

c)) Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1. Denn: sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wiederum existiert nach dem Archimedischen Prinzip I.1.23 ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \cdot \varepsilon > 1$. Also folgt

$$\Big|1 - \frac{n}{n+1}\Big| = \Big|\frac{1}{n+1}\Big| < \frac{1}{N_0} < \varepsilon, \quad \text{für alle } \; n \geq N_0.$$

d) Für $n \in \mathbb{N}$ setze
$$a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}.$$
Da $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$ für alle $j \geq 1$ gilt, folgt $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1, d.h. $(a_n)_{n\geq 1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Obige Summe wird oft auch als *Teleskopsumme* bezeichnet.

e) Es sei $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denn, nehmen wir an, dass (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N_0$. Also gilt für alle diese n
$$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
Wir erhalten also einen Widerspruch, welcher bedeutet, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

1.5 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls eine Konstante $M > 0$ existiert mit
$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

1.6 Satz. *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

Beweis. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Nach Definition exisitiert für $\varepsilon = 1$ ein $N_0 \geq 1$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N_0$. Also gilt für $n \geq n_0$
$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$
und somit
$$|a_n| \leq \max \underbrace{\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}}_{\text{endlich viele}} =: M \quad \text{für alle} \, n \in \mathbb{N}.$$
□

1.7 Beispiele. a) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

b) Für $q \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := q^n$. Dann gilt:

i) Ist $|q| > 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt, also divergent.

ii) Ist $|q| < 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

1.8 Lemma. (Rechenregeln für konvergente Folgen). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) $(a_n + b_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$.

b) $(a_n \cdot b_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$.

c) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N_0$ und $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq N_0} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$.

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N_1, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N_2. \end{aligned}$$

Setzen wir $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$, so gilt

$$|a + b - (a_n + b_n)| \leq \underbrace{|a - a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b - b_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also die Behauptung.
Die Aussagen b) und c) überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Das folgende Beispiel illustriert gut die obigen Rechenregeln für konvergente Folgen. Für $n \geq 2$ setzen wir

$$a_n = \frac{3n^2 - 2a + 1}{-n^2 + n}.$$

Dann ist $a_n = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n}}$ für alle $n \geq 2$ und es folgt aus obigem Lemma 1.8, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = -3$ gilt.

Eine wichtige Vorgehensweise um eine gegebene Folge auf Konvergenz zu untersuchen, besteht darin, ihre Folgenglieder gegen die einer konvergenten Folge abzuschätzen. Hierzu müssen wir jedoch sicherstellen, dass Konvergenz und Ordnung miteinander verträglich sind. Dies ist jedoch die Aussage des folgenden Lemmas.

1.9 Lemma. (Verträglichkeit von Konvergenz und Ordnung). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N_0$, so folgt $a \leq b$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Aussage des Lemmas falsch sei, d.h. dass $a > b$ gelte. Für $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} a - a_n &\leq |a - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0, \\ b_n - b &\leq |b - b_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$b_n < b + \varepsilon = \frac{2b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Widerspruch! □

Der folgende sogenannte „Sandwichsatz“ folgt unmittelbar aus obigem Satz.

1.10 Korollar. (Sandwichsatz). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ und es existiere ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \textit{für alle } n \geq N_0.$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Für den weiteren Aufbau der Analysis ist es wichtig, Kriterien zu entwickeln, welche die Konvergenz einer Folge implizieren ohne deren Grenzwert explizit zu kennen. Hierzu führen wir folgende Begriffe ein.

1.11 Definition. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt
a) *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
b) *streng monoton wachsend*, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
c) *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
d) *streng monoton fallend*, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Gilt einer der Fälle i)-iv), so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton*.

1.12 Satz. *Jede beschränkte monotone reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar*

a) gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend,*

b) gegen $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls (a_n) monoton fallend ist.*

Beweis. a) Das Vollständigkeitsaxiom impliziert, dass $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert. Wir folgern aus der Charakterisierung des Supremums in Satz I.1.22, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s \quad \text{for all } n \geq N_0$$

gilt. Deshalb ist $-\varepsilon < a_n - s \leq 0$ für alle $n \geq N_0$ und es gilt $|a_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$.
Der Beweis der Aussage b) verläuft analog.

□

Der obige Satz ist sehr nützlich um die *Wurzelfunktion* zu definieren.

1.13 Satz. *Es sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $w > 0$ mit $w^k = a$. In diesem Fall schreiben wir $\sqrt[k]{a} := a^{1/k} := w$.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit der *Existenz* der Zahl w. Hierzu definieren wir eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ rekursiv via

$$a_1 := a + 1, \qquad a_{j+1} := a_j\Big(1 + \frac{a - a_j^k}{k \cdot a_j^k}\Big), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Mit vollständiger Induktion beweisen wir die folgenden Aussagen:

a) $a_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$,

b) $a_j^k \geq a$ für alle $j \in \mathbb{N}$,

c) $a_{j+1} \leq a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge.

Für den Beweis der Aussage b) verwenden wir im Induktionsschritt mit Vorteil die Bernoullische Ungleichung. Da die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend ist, impliziert Satz 1.12, dass

$$w := \lim_{j\to\infty} a_j = \inf\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$$

gilt. Ferner ist $\lim\limits_{j\to\infty} a_{j+1} = w$ und $(\lim\limits_{j\to\infty} a_j)^k \underbrace{=}_{1.8b)} \lim\limits_{j\to\infty} a_j^k \geq a > 0$. Weiterhin, da

$$a_{j+1} = a_j\Big(1 + \frac{a - a_j^k}{k \cdot a_j^k}\Big) \xrightarrow{j\to\infty} w \cdot \Big(1 + \frac{a - w^k}{k \cdot w^k}\Big),$$

gilt, folgt $w = w(1 + \frac{a-w^k}{k\cdot w^k})$ und somit $a = w^k$.
Um die *Eindeutigkeit* der Zahl w zu beweisen, betrachte $u, v > 0$ mit $u^k = w = v^k$ und $u \neq v$. Es sei oBdA $u < v$. Dann gilt aber $w = u^k < v^k = w$. Widerspruch!

□

Wir wollen an dieser Stelle noch die obige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ geometrisch interpretieren. Sie ist Grundlage zur näherungsweisen Berechnung der Wurzel einer gegebenen reellen Zahl $a > 0$, wie zum Beispiel auch im *Newton-Verfahren.*

Betrachtet man die Tangente an die Funktion $f(x) = x^k - a$ im Punkt $x = a_j$, so schneidet diese die x-Achse im Punkt $x = a_{j+1}$. Wir bemerken ferner dass dieses Verfahren für jeden Startwert $a_1 > 0$ konvergiert und dass eine Konstante $M > 0$ existiert mit $|\sqrt[k]{a}-a_{j+1}| \leq M|\sqrt[k]{a}-a_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$. Wir sprechen deshalb von quadratischer Konvergenz des Verfahrens.

1.14 Bemerkung. Ausgehend von der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{a}$ einer reellen Zahl $a \geq 0$ definieren wir allgemeiner für $p, q \in \mathbb{N}$

$$a^{p/q} := (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q},$$

und setzen für $a > 0$

$$a^{-p/q} := (a^{-1})^{p/q}.$$

Setzen wir ferner $a^0 := 1$, so erhält man via vollständiger Induktion die folgenden Rechenregeln

$$a^{p+q} = a^p a^q, \quad a^{pq} = (a^p)^q, \quad a^p b^p = (ab)^p$$

für $a \geq 0, b \geq 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Wir werden später die allgemeine Potenz a^x für $a \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ elegant mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren. Aus diesem Grunde belassen wir es an dieser Stelle mit der obigen rudimentären Betrachtung von a^q für $q \in \mathbb{Q}$.

Wir kommen nun zu einer weiteren Anwendung des Satzes 1.12.

1.15 Satz. (Die Zahl e). *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch*

$$a_n := (1 + \frac{1}{n})^n, \quad n \geq 1.$$

Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ihr Grenzwert heißt Eulersche Zahl und wird mit e bezeichnet. Ferner gilt die Abschätzung

$$2 \leq \lim_{n\to\infty} a_n = e \leq 3.$$

Beweis. Nach obigem Satz 1.12 und Lemma 1.9 genügt es zu zeigen, dass

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist und dass

b) $2 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \geq 1$ gilt.

zu a): Wir verifizieren mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} (1 - \frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt $a_n \geq a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
zu b): Nach der obigen Aussage a) gilt $a_1 = 2 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \overset{\text{Bin.Satz}}{\underset{I.1.15}{=}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}.$$

Für $2 \leq j \leq n$ gilt ferner

$$\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{1}{n^j} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots (n-j) \underbrace{n \cdots n}_{j-mal}} \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

und somit

$$a_n \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \overset{\text{geom.Reihe}}{\underset{I.1.11b)}{=}} 1 + \frac{\big(1 - \frac{1}{2}\big)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch einige weitere, wichtige Grenzwerte. Die Beweise der folgenden Aussagen d) und e) sind sehr nützliche Übungsaufgaben, welche ein gutes Verständnis des Konvergenzbegriffs einfordern.

1.16 Beispiele. a) Für $s \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \geq (\varepsilon)^{\frac{-1}{s}}$. Dann gilt $\frac{1}{n^s} < \varepsilon$ für alle $n > N_0$.
b) Für $a > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $a \geq 1$. Setzt man $b_n := \sqrt[n]{a}$, so folgt aus der Bernoullischen Ungleichung $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$. Insbesondere ist also $b_n < \frac{a}{n}$ und wählen wir $N_0 > \frac{a}{\varepsilon}$, so gilt

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = b_n < \varepsilon, \quad n > N_0.$$

Gilt $a < 1$, so ist $a^{-1} > 1$ und mittels der in Lemma 1.8 c) bewiesenen Rechenregel folgt die Aussage aus dem oben bewiesenen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}}\big)^{-1} = 1.$$

c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Der Binomische Lehrsatz impliziert für $b_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + b_n^2, \qquad \text{also } n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2.$$

Daher ist $b_n^2 \leq \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \geq \frac{2}{\varepsilon^2}$, so gilt

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = b_n < \varepsilon, \quad n > N_0.$$

d) Für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

d.h. für a mit $|a| > 1$ wächst die Funktion $n \mapsto a^n$ schneller als *jede* Potenz $n \mapsto n^k$. In dieser Situation sind zwei entgegengesetzte Kräfte am Werk: der Zähler n^k wächst über alle Grenze, während der Term $\frac{1}{a^n}$ nach Null strebt. Es ist nun nicht ohne weiteres einzusehen ist, welcher Term überwiegt.

e) Für $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

d.h. die Fakultät $n \mapsto n!$ wächst schneller als *jede* der Funktionen $n \mapsto a^n$.