2 Die komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt führen wir den Körper der komplexen Zahlen wiederum axiomatisch ein und beginnen mit der folgenden Definition.

2.1 Definition. Auf $\mathbb{R}^2 := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ definieren wir eine Addition und eine Mulitplikation wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \textit{Addition} & \oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : & (a,b) \oplus (c,d) := (a+c, b+d) \\ \textit{Multiplikation} & \odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : & (a,b) \odot (c,d) := (ac-bd, ad+bc). \end{array}$$

Dann erfüllen die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ für $x = (a,b), y = (c,d)$ und $z = (e,f) \in \mathbb{R}^2$ die Körperaxiome von Abschnitt 1, wobei

$$\begin{array}{lcll} 0_\oplus & = & (0,0) & \text{das } \textit{neutrale Element bzgl. der Addition } \oplus, \\ 1_\odot & = & (1,0) & \text{das } \textit{neutrale Element bzgl. der Multiplikation } \odot, \\ -(a,b) & = & (-a,-b) & \text{das } \textit{inverse Element bzgl. der Addition } \oplus, \\ (a,b)^{-1} & = & \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) & \text{das } \textit{inverse Element bzgl. der Multiplikation } \odot \text{ ist,} \\ & & & \text{falls } (a,b) \neq 0_\oplus = (0,0). \end{array}$$

Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf die Lineare Algebra. Die Menge $\mathbb{R}^2$ versehen mit $\oplus$ und $\odot$ ist deshalb ein Körper, welchen wir den *Körper der komplexen Zahlen* nennen. Er wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.
Für $(a,0) \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (a,0) \oplus (b,0) &= (a+b, 0), \\ (a,0) \odot (b,0) &= (a \cdot b, 0), \end{aligned}$$

d.h. identifizieren wir $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0) \in \mathbb{C}$, so ist $\mathbb{R}$ ein *Teilkörper von* $\mathbb{C}$.

2.2 Definition. Wir setzen $i := (0,1) \in \mathbb{C}$. Die Zahl $i \in \mathbb{C}$ heißt *imaginäre Einheit.*

Nach der Definition von $\odot$ gilt

$$i^2 = (0,1) \odot (0,1) = (-1,0) = -1,$$

d.h. i ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

2.3 Bemerkung. Der Körper $\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen, d.h. es existiert keine Relation „$<$ “, so dass in $\mathbb{C}$ die Anordnungsaxiome von Abschnitt 1 gelten. In der Tat, nehmen wir an, dass $\mathbb{C}$ sich anordnen lassen würde. Dann ist $i^2 > 0$ und $0 < i^2 + i^2 = 0$. Widerspruch!

2.4 Bemerkung. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a, b) = \underbrace{(a, 0)}_{=a} \oplus \underbrace{(0, 1)}_{=i} \odot \underbrace{(b, 0)}_{=b}.$$

Identifizieren wir wie oben a mit $(a, 0)$ so erhalten wir

$$\mathbb{C} \ni (a, b) = z = a + i \cdot b.$$

Die reelle Zahl a heißt *Realteil* von $z = a + ib$ und wird mit $\operatorname{Re} z = a$ bezeichnet. Ferner heißt b *Imaginärteil* von $z = a + ib$. Wir setzen $\operatorname{Im} z = b$.

2.5 Definition. (Konjugation und Betrag). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

a) Die komplexe Zahl
$$\overline{z} := a - ib$$
heißt *konjugiert komplexe Zahl* von z.

b) Der *Betrag* $|z|$ von z ist definiert als $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt die Definition des Betrags natürlich mit der Definition aus Abschnitt 1 überein.

2.6 Lemma. (Rechenregeln für komplexe Zahlen). *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln:*

a) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w,$

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$

c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2,$

d) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 = \operatorname{Im} z,$

e) $|z| = |\overline{z}|,$

f) $|z + w| \leq |z| + |w|$, *(Dreiecksungleichung)*

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

2.7 Bemerkung. (Die Gaußsche Zahlenebene). Die komplexe Zahlen können in der Gaußschen Zahlenebene wie folgt dargestellt werden.