Skriptum zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2007/08

Matthias Hieber
Fachbereich Mathematik
TU Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

I Grundlegendes über Zahlen

1 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen? Dies ist – je nach Standpunkt – eine mehr oder weniger schwierige Frage. Im Folgenden beschreiben wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch Regeln, welche festlegen wie man mit diesen Zahlen „rechnen "darf. Diese Regeln nennen wir das *Axiomensystem der reellen Zahlen*. Genauer gesagt, besteht dieses aus den folgenden

- Körperaxiomen, den
- Anordnungsaxiomen sowie dem
- Vollständigkeitsaxiom.

Alle Aussagen dürfen ausschließlich aus diesen Axiomen abgeleitet werden. Wir beginnen mit den Körperaxiomen.

1.1. Die Körperaxiome.
Auf der Menge $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen, die *Addition* „+", sowie die *Multiplikation* „·" erklärt:

Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x + y,$

Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x \cdot y.$

Diese erfüllen die folgenden Körperaxiome:

Axiome der Addition

(A1) *Kommutativgesetz*: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$.

(A2) *Assoziativgesetz*: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A3) *Existenz eines neutralen Elements*: Es existiert $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A4) *Existenz eines inversen Elements*: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$.

Axiome der Multiplikation

(M1) *Kommutativgesetz*: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.

(M2) *Assoziativgesetz*: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(M3) *Existenz eines neutralen Elements*: es existiert $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, mit $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(M4) *Existenz eines inversen Elements*: für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.

Das folgende Distributivgesetz besagt wie Addition und Multiplikation kombiniert werden dürfen.

(D) *Distributivgesetz*: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Eine Menge $\mathbb{K}$ von Elementen $a, b, \ldots$ für die eine additive Verknüpfung $a + b$ und eine multiplikative Verknüpfung $a \cdot b$ definiert ist, welche obigen Eigenschaften genügt, nennt man einen *Körper*. In der Vorlesung Lineare Algebra werden Körper und deren Axiome in wesentlich größerer Ausführlichkeit behandelt. Wir bemerken an dieser Stelle nur, dass die Elemente 0 und 1 eindeutig bestimmt sind und dass die Aussage $x \cdot y = 0$ impliziert, dass $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Wir führen noch folgende vereinfachenden Schreibweisen ein:

$$xy := x \cdot y, \quad \frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}, \quad x - y := x + (-y), \quad x^2 := x \cdot x, \quad 2x := x + x.$$

1.2. Die Anordnungsaxiome.
In $\mathbb{R}$ sind gewisse Zahlen als *positiv* ausgezeichnet $(x > 0)$, so dass gilt:

(O1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $x = 0$, $x > 0$, $-x > 0$.

(O2) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

(O3) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x \cdot y > 0$.

Das zweite Axiom besagt die *Verträglichkeit mit der Addition*, das dritte die *Verträglichkeit mit der Multiplikation*. Die folgende Definition ermöglicht es, beliebige Elemente von $\mathbb{R}$ zu vergleichen.

1.3 Definition. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} x > y \quad &:\Leftrightarrow \quad x - y > 0 \\ x \geq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x - y > 0 \text{ oder } x - y = 0. \end{aligned}$$

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ heißt *positiv*. Für $x > y$ und $x \geq y$ schreibt man auch $y < x$ bzw. $y \leq x$. Gilt $x < 0$, so heißt x *negativ*.

1.4. Rechenregeln. Es seien $x, y, z, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:
a) Es gilt genau eine der Beziehungen $x = y$, $x < y$ oder $x > y$ *(Trichotoniegesetz)*.
b) Ist $x < y$ und $y < z$, so gilt $x < z$ *(Transitiviät)*.
c) Ist $x < y$ und $\alpha \leq \beta$, so gilt $x + \alpha < y + \beta$ *(Monotonie der Addition)*.
d) Ist $x < y$, so gilt $-x > -y$.
e) Ist $x < y$ und $\alpha > 0$, so gilt $\alpha x < \alpha y$ *(Monotonie der Multiplikation)*.
f) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$, insbesondere ist $1 > 0$.
g) Ist $0 < x < y$, so gilt $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
h) Ist $x < y$, so folgt $x < \frac{x+y}{2} < y$ *(Arithmetisches Mittel)*.

Beweis. a) folgt direkt aus der Definition 1.3 und dem Anordnungsaxiom (O1).
b) Nach Definiton 1.3 gilt $y - x > 0$ und $z - y > 0$. Das Anordnungsaxiom (O2) impliziert, dass $z - x = (y - x) + (z - y) > 0$ ist; also gilt $z > x$ und somit $x < z$.
c)-e) Übungsaufgaben.
f) Sei zunächst $x > 0$. Dann gilt $x \cdot x = x^2 > 0$ wegen (O3). Ist $x < 0$, so impliziert die Aussage d), dass $-x > 0$ ist und daher gilt $(-x)(-x) = x^2 > 0$ nach (O3).
g) Da $x > 0$ und $(x^{-1})^2 > 0$ ist, gilt $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$ und analog $y^{-1} > 0$. Also ist $x^{-1} \cdot y^{-1} > 0$. Die Voraussetzung $0 < x < y$ impliziert nun $y^{-1} = x \cdot (x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}$.
h) Übungsaufgabe

□

Die Körper- und Anordnungsaxiome implizieren, dass es außer 0 und 1 noch weitere Zahlen in $\mathbb{R}$ gibt. Addiert man in der Ungleichung $0 < 1$ auf beiden Seiten 0, bzw. 1, so erhalten wir $0 + 0 = 0 < 1 + 0 = 1$, $1 < 1 + 1 = 2$, also $2 \neq 0, 2 \neq 1$.

1.5 Definition. (Absolutbetrag). Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren den *Betrag von* x als

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

1.6 Bemerkungen. Für den Absolutbetrag gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $|-x| = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\big||x|\big| = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$

e) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, \quad x \in \mathbb{R}, y \neq 0$

f) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$ (Dreiecksungleichung)

g) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. a) b) c) d) e) g) als Übungsaufgaben. Zu f): es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ sowie $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$. Die Monotonie der Addition 1.4 c) ergibt $-x - y \leq |x| + |y|$, sowie $x + y \leq |x| + |y|$. Deshalb gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

Wir betrachten nun die natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und beginnen mit der folgenden Definition.

1.7 Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, indexinduktiv falls gilt:

a) $0 \in M$

b) $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

Klarerweise ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ induktiv. Definieren wir $M := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, so ist M ebenfalls induktiv, sofern $a \leq 0$ gilt.

1.8. Satz und Definition. *Es existiert eine kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbb{R}$. *Diese heißt die Menge der natürlichen Zahlen und wird mit* $\mathbb{N}_0$ *bezeichnet.*

Beweis. Setze $\mathbb{N}_0 := \bigcap_{\text{M induktiv, } M \subset \mathbb{R}} M$, d.h. mit anderen Worten, $\mathbb{N}_0$ ist die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Daher gilt $0 \in \mathbb{N}_0$, da $0 \in M$ für alle induktiven Mengen $M \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Ferner sei } x \in \mathbb{N}_0 \quad &\Rightarrow \quad x \in M \;\; \text{für alle induktiven Teilmengen } M \subset \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad x+1 \in M \;\; \text{für alle induktiven Teilmengen } M \subset \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad x+1 \in \mathbb{N}_0 .\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{N}_0$ induktiv und da $\mathbb{N}_0 \subset M$ für alle induktiven Mengen $M \subset \mathbb{R}$ gilt, ist $\mathbb{N}_0$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1.9 Korollar. (Induktionssatz). *Es sei $N \subset \mathbb{N}_0$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:*

a) $0 \in N$

b) $x \in N \Rightarrow x+1 \in N.$

Dann ist $N = \mathbb{N}_0$.

Der Beweis ist klar, da $\mathbb{N}_0$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Damit können wir die *Beweismethode der vollständigen Induktion* betrachten.

1.10 Satz. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Aussage $A(n)$ definiert. Es gelte:*

a) $A(0)$ ist richtig (Induktionsanfang).

b) Falls $A(n)$ richtig ist, so folgt, dass $A(n+1)$ richtig ist (Induktionsschritt).

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Der Beweis ist einfach. Wir setzen $N := \{n \in \mathbb{N}_0 : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann ist $N \subset \mathbb{N}_0$ induktiv und Korollar 1.9 impliziert, dass $N = \mathbb{N}_0$ gilt.

1.11 Beispiele.

a) *Die Bernoullische Ungleichung.*
Es sei $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

b) *Geometrische Reihe:* Es seien $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $A(0)$ ist richtig, denn $q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = 1$.
Induktionsschritt: Nach Voraussetzung ist $A(n)$ richtig. Also gilt:

$$\begin{aligned}\underbrace{q^0 + q^1 + \cdot + q^n} + q^{n+1} &\overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}\end{aligned}$$

Also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

1.12 Satz. (Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$). *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a) $0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \in \mathbb{N}_0$

b) $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n = 0$ *oder* $n \geq 1$

c) $n, m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n + m \in \mathbb{N}_0$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}_0$

d) $n, m \in \mathbb{N}_0, n \geq m \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}_0$

e) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. *Es existiert kein* $m \in \mathbb{N}_0$ *mit* $n < m < n + 1$.

f) Jede nichtleere Menge M natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element; mit anderen Worten sei $M \neq \emptyset$ und $M \subset \mathbb{N}_0$. Dann exisitiert $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. a) Es gilt $0 \in \mathbb{N}_0$ nach Definition und $\mathbb{N}_0$ ist induktiv. Also gilt $0+1 = 1 \in \mathbb{N}_0$.
b) Setze $B := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}_0 : n-1 \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n-1 \geq 0\} \subset \mathbb{N}_0$. Dann ist B induktiv. In der Tat ist $0 \in B$. Ferner sei $n \in B$. Es ist zu zeigen, dass $n+1 \in B$. Falls $n = 0$, so folgt $n + 1 = 1 \in B$. Falls $n \neq 0$, so folgt $0 \leq n - 1$. Daher ist $0 < 1 \leq n = (n+1) - 1 \in \mathbb{N}_0$ und somit $n + 1 \in B$. Also gilt $B = \mathbb{N}_0$ und somit die Behauptung.
c) d) e) f) als Übungsaufgaben.

$\square$

1.13 Satz. (Eine Variante des Induktionsprinzips). *Für* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *gelte*

a) $A(n_0)$ *richtig.*

b) $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n)$ richtig $\Rightarrow A(n+1)$ richtig.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

Auf diese Weise kann man zum Beispiel zeigen, dass $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$ gilt.

1.14. Beispiele zur Induktion. Wir betrachten zunächst *rekursive Definitionen*:

a) *Potenz*: Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1 \\ x^{n+1} &:= x \cdot x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 . \end{aligned}$$

b) *Fakultät*:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ (n+1)! &:= (n+1) \cdot n!, \quad n \in \mathbb{N}_0 . \end{aligned}$$

c) *Endliche Summen und Produkte*:
Es seien $a_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen

$$\sum_{j=0}^{0} a_j := a_0, \quad \sum_{j=0}^{n+1} a_j := a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} a_j, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\prod_{j=0}^{0} a_j := a_0, \quad \prod_{j=0}^{n+1} a_j := a_{n+1} \cdot \prod_{j=0}^{n} a_j, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Entsprechend definiert man für $l \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=l}^{n} a_j \quad \text{bzw.} \ \prod_{j=l}^{n} a_j, \qquad n \geq l.$$

d) *Binomialkoeffizienten*:
Für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\binom{a}{0} := 1, \quad \binom{a}{k+1} := \frac{a-k}{k+1}\binom{a}{k}.$$

Mit vollständiger Induktion lassen sich nun folgende Aussagen beweisen:

i) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

ii) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

iii) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{n-k} & \text{falls} \quad k \leq n \\ 0 & \text{falls} \quad k > n \end{cases}$$

iv) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ „*Pascalsches Dreieck* "

1.15 Satz. (Binomischer Lehrsatz). *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

Beweis.
i) Induktionsanfang. Die Behauptung gilt offensichtlich für $n = 0$, d.h.

$$1 = (a+b)^0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} a^0 b^0 = 1.$$

ii) Induktionsschritt. Wir nehmen an, dass die Aussage des Satzes für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}]}_{\overset{1.14 d) iii)}{=} \binom{n+1}{j}} a^j b^{n-j+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n-j+1},
\end{aligned}$$

d.h. die Aussage des Satzes gilt auch für $n+1$.

□

1.16 Definition. a) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach *oben beschränkt*, falls $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$m \leq s \text{ für alle } m \in M.$$

In diesem Fall heißt s eine *obere Schranke* von M.
b) Eine obere Schranke s_0 heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* indexSupremum von $M \subset \mathbb{R}$, falls für jede obere Schranke s von M gilt:

$$s_0 \leq s.$$

Wir setzen $\sup M := s_0$.

Bemerkungen. a) Sind s_0, s_0' kleinste obere Schranken von M, so folgt $s_0 \leq s_0'$ und $s_0' \leq s_0$, also $s_0 = s_0'$. Dies bedeutet, dass das Supremum einer Menge reeller Zahlen *eindeutig* bestimmt ist.
b) Die Existenz des Supremums einer nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen garantieren wir durch das folgende Vollständigkeitsaxiom.

1.17. Vollständigkeitsaxiom. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere und nach oben beschränkte Menge. Dann besitzt M ein Supremum s_0.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind damit axiomatisch eingeführt, als eine Menge versehen mit der Addition $+$, der Multiplikation $\cdot$, sowie der Ordnung $<$, welche den Körper- und Anordnungsaxiomen, sowie dem Vollständigkeitsaxiom genügen.

1.18 Definition. Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ und $s_0 = \sup M$. Falls $s_0 \in M$ ist, so heißt s_0 *Maximum* von M. Wir setzen $\max M := s_0$.

1.19 Beispiele. a) Es sei $M := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$. Dann gilt $\sup M = 1$, aber M besitzt kein Maximum. In der Tat ist $s_0 = 1$ klarerweise eine obere Schranke von M. Nehmen wir an es existiere eine obere Schranke $s < 1$ von M. Nach den Rechenregeln 1.4 h) gilt dann $s < \frac{s+1}{2} < 1$, im Widerspruch dazu, dass s obere Schranke von M ist. Ferner gilt $1 \notin M$, also ist $s_0 = 1$ kein Maximum.
b) Sei $a \geq 0$ und $M := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ und } x^2 \leq a\}$. Dann ist M nach oben beschränkt, zum Beispiel gilt $x \leq 1 + a$ für alle $x \in M$. Ferner ist offentsichtlich $M \neq \emptyset$, da $0 \in M$. Das Vollständigkeitsaxiom impliziert daher, dass $s_0 := \sup M$ existiert. Weiter gilt

$$s_0^2 = a.$$

Beweis.

i) Ist $a = 0$, so gilt $s_0 = 0$. Im Folgenden sei daher $a > 0$.

ii) Es gilt $s_0^2 \geq a$. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann ist $a - s_0^2 > 0$ und somit $\varepsilon := \frac{a-s_0^2}{2s_0+1} > 0$. Ferner ist $\varepsilon < 1$, denn angenommen es gelte $\varepsilon \geq 1$, so wäre

$$a - s_0^2 \geq 2s_0 + 1 \Leftrightarrow a \geq s_0^2 + 2s_0 + 1 = (s_0+1)^2.$$

Also wäre $s_0 + 1 \in M$ und somit $s_0 + 1 \leq \sup M = s_0$. Widerspruch! Also ist

$$(s_0 + \varepsilon)^2 = s_0^2 + 2s_0\varepsilon + \varepsilon^2 < s_0^2 + (2s_0+1)\varepsilon = s_0^2 + a - s_0^2 = a.$$

Deshalb ist $s_0 + \varepsilon \in M$ und somit auch $s_0 + \varepsilon \leq s_0$ im Widerspruch zur Definition von s_0. Deshalb gilt $s_0^2 \geq a$.

iii) Es gilt $s_0^2 \leq a$. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gilt $s_0^2 - a > 0$. Setzt man $\delta := \frac{s_0^2-a}{2s_0} > 0$, so ist $s := s_0 - \delta = \frac{2s_0^2 - s_0^2 + a}{2s_0} = \frac{s_0^2+a}{2s_0} > 0$ und $s^2 = s_0^2 - 2s_0\delta + \delta^2 = s_0^2 - s_0^2 + a + \delta^2 = a + \delta^2 > a$. Also gilt $s^2 > a \geq x^2$ für alle $x \in M$ und $s > x$ für alle $x \in M$. Somit ist $s^2 < s_0^2$ eine obere Schranke von M im Widerspruch zur Minimalität von s_0.

Die Aussagen ii) und iii) implizieren, dass $s_0^2 = a$ gilt.
c) *Folgerung.* Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ existiert genau eine reelle Zahl $w > 0$ mit $w^2 = a$. Die Zahl w heißt *Wurzel von a* und wird mit $w = \sqrt{a}$ bezeichnet.

1.20 Definition. a) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach *unten beschränkt*, falls ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$r \leq m \quad \text{für alle} \quad m \in M.$$

In diesem Fall heißt r *untere Schranke* von M.
b) Eine untere Schranke r_0 heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von M, falls für alle untere Schranken r von M gilt

$$r \leq r_0.$$

Wir setzen $\inf M := r_0$.
c) Gilt $r_0 \in M$, so heißt r_0 *Minimum von M* und wir setzen $\min M := r_0$.
d) Ist $M \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt M *beschränkt.*

1.21 Lemma. *Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ und $-M := \{-m : m \in M\}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) M ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ $-M$ ist nach oben beschränkt.

b) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge M besitzt ein Infimum. Dies ist eindeutig bestimmt.

c) *Ist* $M \neq \emptyset$ *nach unten beschränkt, so gilt* $\inf M = -\sup(-M)$.

Den einfachen Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

1.22 Satz. (Charakterisierung des Supremums). *Es sei* $M \subset \mathbb{R}$ *eine nichtleere und nach oben beschränkte Menge sowie* $s_0 \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sup M = s_0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq s_0 \text{ für alle } m \in M \text{ und für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \mu \in M \text{ mit } \mu > s_0 - \varepsilon.$$

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $s_0 = \sup M$. Dann ist $m \leq s_0$ für alle $m \in M$. Wir nehmen an es existiere $\varepsilon > 0$ so dass für alle $m \in M$ die Ungleichung $m \leq s_0 - \varepsilon$ gelte. Dann ist $s := s_0 - \varepsilon$ eine obere Schranke von M. Widerspruch!
$\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist s_0 eine obere Schranke von M. Wir nehmen an, es existiere $s \in \mathbb{R}$ mit $s < s_0$ und $m \leq s$ für alle $m \in M$. Setze $\varepsilon := s_0 - s > 0$. Dann ist $s = s_0 - \varepsilon$ und $m \leq s_0 - \varepsilon$ für alle $m \in M$. Widerspruch!

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts definieren wir noch die *natürlichen Zahlen* Zahlen $\mathbb{N}$ sowie die *ganzen Zahlen* als

$$\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen* ergibt sich dann als

$$\mathbb{Q} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\};$$

Ferner nennen wir die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die *irrationale Zahlen* .

1.23 Korollar. a) $\mathbb{N}_0$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

b) *Prinzip des Archimedes:*
Für alle $a > 0$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *existiert* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \cdot a > b$.

c) *„Klassische Schlussweise“ der Analysis:*
Es gelte $0 \leq a < \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $a = 0$.

Beweis. a) Wir nehmen an, dass $\mathbb{N}_0$ nach oben beschränkt sei. Dann existiert $s_0 = \sup \mathbb{N}_0$ nach dem Vollständigkeitsaxiom. Die Charakterisierung des Supremums in Satz 1.22 mit $\varepsilon = 1$ impliziert, dass ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $n > s_0 - 1$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von s_0.
b) Annahme es gelte $n \cdot a \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathbb{N}_0$ nach oben beschränkt durch $\frac{b}{a}$ im Widerspruch zur Aussage a).
c) Wir nehmen an, es gelte $a > 0$. Dann ist $n \cdot a < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Aussage b).

□