Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 28.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Geben Sie ein Folge von Treppenfunktionen an, die gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert und bestimmen Sie damit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Beachten Sie das Ergebnis von Aufgabe (T2) auf dem zweiten Tutoriumsblatt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Treppenfunktion

$$\phi_n(x) = \frac{k^2}{n^2}, \quad \text{falls } x \in [k/n, (k+1)/n),\ k = 0, \dots, n-1$$

mit $\phi_n(1) = (n-1)^2/n^2$.

Sei nun $x \in [0,1)$. Dann gibt es ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $x \in [k/n, (k+1)/n)$ und wir haben $k^2/n^2 \le x^2 \le (k+1)^2/n^2$ mit diesem k. Damit ist

$$|f(x) - \phi_n(x)| = \left| x^2 - \frac{k^2}{n^2} \right| = x^2 - \frac{k^2}{n^2} \le \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} = \frac{2k+1}{n^2} \le \frac{2n+1}{n^2} \le \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Da für $x = 1$ ebenfalls $|f(x) - \phi_n(x)| = (2n-1)/n^2 \le 3/n$ gilt, ist damit

$$\|f - \phi_n\|_\infty \le \frac{3}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Das gestattet nun die Berechnung des gesuchten Integrals über

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_n\Big(\frac{k}{n}\Big) \cdot \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Im zweiten Tutorium, Aufgabe (T2) hatten wir gezeigt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt, also haben wir weiter

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

(G 2)

Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sprungstetig ist.

Lösung: *Behauptung*: Jede montone Funktion ist sprungstetig.

Beweis: Es sei O.B.d.A. f monoton wachsend. (Betrachte $-f$, falls f monoton fällt.) Es sei $x \in (a, b]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann ist aufgrund der Monotonie von f die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und wegen $f(x_n) \leq f(x)$ nach oben beschränkt. Daher existiert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Analog folgt für $x \in [a, b)$, dass der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{y\to x+0} f(y)$ existiert. Also ist f nach Definition V.1.1 sprungstetig. □

(G 3)

Es sei $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, aber $F' \notin \mathcal{S}[0, 1]$ gilt.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass es Funktionen gibt, die nicht sprungstetig sind, aber eine Stammfunktion besitzen.

Lösung: Als Verkettung und Produkt differenzierbarer Funktionen ist zunächst F für alle $x \neq 0$ differenzierbar und die Ableitung ist

$$F'(x) = 2x\sin(1/x^2) + x^2\cos(1/x^2) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

Die Ableitung von F in Null bestimmen wir über den Differenzenquotienten zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/h^2) = 0,$$

da die Sinus-Funktion beschränkt ist. Also ist F auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es bleibt zu zeigen, dass F' nicht sprungstetig ist. Dazu betrachten wir die Folge $x_n := 1/\sqrt{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, aber

$$F'(x_n) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin(2n\pi) - 2\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi) = -2\sqrt{2n\pi}$$

divergiert bestimmt gegen $-\infty$ für $n \to \infty$. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\to 0+0} F'(x)$ nicht und damit ist F' nicht sprungstetig. □