Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 21.01.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n},\ x \in [0,2] \quad \text{und} \quad g_n(x) = \frac{nx+2}{n|x|+1},\ x \in [-1,1],$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen jeweils für $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(c) Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und/oder $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent?

LÖSUNG: (a)

(b) Wir betrachten zunächst $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$

und für $x \in (1,2]$ divergiert die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen unendlich. Damit ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent und es gilt für die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 1, \\ 0, & \text{falls } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Wir wenden uns $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu. Auch diese Funktionenfolge ist punktweise konvergent und die Grenzfunktion ist

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx+2}{n|x|+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x+\frac{2}{n}}{|x|+\frac{1}{n}} = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 \le x < 0, \\ 2 & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

(c) Wir setzen $x_n := \sqrt[n]{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \in (1,2)$, d.h. wir haben $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{1+2^{n/n}} \right| = \frac{1}{3}.$$

Somit gibt es zu $\varepsilon = 1/4$ kein $N \in \mathbb{N}$, mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $x \in [0,2]$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gleichmäßig konvergent.

Mit einer analogen Argumentation ist auch die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergent, denn für die Werte $x_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$|g_n(x_n) - g(x)| = \left| \frac{1+2}{1+1} - 1 \right| = \frac{1}{2}.$$

(G 2)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}}, \qquad x \in [0,\infty)$$

gegeben.

(a) Begründen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion f an.

(b) Bestimmen Sie die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

(c) Gilt
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$
für alle $x \in [0,\infty)$?

LÖSUNG: (a) Sei $x \in [0,\infty)$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2e^{nx}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x^2 - \lim_{n\to\infty}\frac{nx+1}{n^2e^{nx}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{n}}{ne^{nx}} = \frac{1}{2}x^2.$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty)$ punktweise gegen die Grenzfunktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Dann ist

$$f_n'(x) = x - \frac{n^3e^{nx} - (nx+1)n^3e^{nx}}{n^4e^{2nx}} = x + \frac{x}{e^{nx}}$$

und somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{x}{e^{nx}}\right) = x.$$

Damit konvergiert $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x.$$

Um die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nachzuweisen, verwenden wir Bemerkung IV.4.3 b) und zeigen dazu, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0$$

ist.

Da $x \geq 0$ ist, gilt wegen $e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k x^k/k! \geq nx$

$$\left|f_n'(x) - g(x)\right| = \left|x + \frac{x}{e^{nx}} - x\right| = \left|\frac{x}{e^{nx}}\right| = \frac{x}{e^{nx}} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}.$$

Damit ist

$$\|f_n' - g\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |f_n'(x) - g(x)| \leq \sup_{x\geq 0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

(c) Ja, die Voraussetzungen von Theorem IV.4.7 sind nach den Aufgabenteilen (a) und (b) erfüllt, also gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x).$$

(G 3)

Beweisen Sie das Weierstraßsche Konvergenzkriterium aus Satz IV.4.9:

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.

Lösung: Wir zeigen, dass die Funktionenfolge $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, also die Folge der Partialsummen gleichmäßig auf D konvergiert. Dazu verwenden wir das Cauchykriterium aus IV.4.4. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Dank des Cauchykriteriums für Reihen (vgl. Lemma II.3.3) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit gilt für all diese n und m auch

$$\|g_n - g_m\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_\infty = \left\|\sum_{k=n}^{m} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$$

und wir sind fertig.

Hausübungen

(H 1)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5];$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

LÖSUNG: (a) Für $x \in (0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für $x = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent auf $[0,5]$ mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in (0,5]. \end{cases}$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Wir setzen $h_n(x) := nx^2/(n^3 + x^3)$ für jedes $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|h_n(x) = \left|\frac{nx^2}{n^3 + x^3}\right| = \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und damit konvergent nach dem Majorantenkriterium. Mit dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium folgt nun die gleichmäßige Konvergenz der untersuchten Funktionenreihe. Damit konvergiert diese insbesondere auch punktweise.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Also konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion.
Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn für $x_n := \frac{n\pi}{2}$ gilt $g_n(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\|f_n - g\|_\infty = \|g_n\|_\infty \geq |g_n(x_n)| = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen Bemerkung IV.4.3 b) kann $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergieren.

(H 2)

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gilt.

(b) Beweisen Sie Lemma 4.13 aus der Vorlesung:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann besitzt die formale Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ.

LÖSUNG: (a) Das wurde bereits in (H1) auf Übungsblatt 4 gezeigt.

(b) Bezeichnen wir den Konvergenzradius der formal abgeleiteten Potenzreihe mit ρ^*, so gilt nach der Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{\rho^*} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty}\big(\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}\big) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{\rho},$$

da die Ausgangsreihe den Konvergenzradius ρ hat. Also ist $\rho^* = \rho$.

(H 3)

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig?

LÖSUNG: (a) Wir unterscheiden zwei Fälle:

$x = 0$: In diesem Fall gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit ist

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = 0.$$

$x \neq 0$: Wegen

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1$$

für alle $x \neq 0$ folgt mit der Formel für die geometrische Reihe die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \\ &= x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}. \end{aligned}$$

Die Summe f besitzt somit die Darstellung

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1+x^2}{x}, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Da die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind, müsste – sofern die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert – die Summenfunktion f ebenfalls stetig sein. Wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to 0+0} f(x) = \infty$ ist f nicht stetig in Null und somit kann die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.