Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 14.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $(T_j f)(x, 0)$ und $(T_j g)(x, 1)$ jeweils für $j = 0, 1, 2, 3$ und skizzieren Sie beide Funktionen jeweils mit den Taylorpolynomen zusammen in ein Schaubild.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die Restglieder $(R_3 f)(x, 0)$ für alle $x \in [0, \pi/4]$ und für $(R_3 g)(x, 1)$ im Bereich $x \in [0, 3]$ an.

LÖSUNG: (a) Es ist $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$ und $f'''(0) = -\cos(0) = -1$. Also gilt

$$(T_0 f)(x, 0) = 0, \qquad (T_1 f)(x, 0) = x,$$
$$(T_2 f)(x, 0) = x, \qquad (T_3 f)(x, 0) = -\frac{1}{6}x^3 + x.$$

Für g erhält man wegen $g'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $g''(x) = 6x - 2$ und $g'''(x) = 6$ zunächst $g(1) = 0$, $g'(1) = 2$, $g''(1) = 4$ und $g'''(1) = 6$, sowie damit

$$(T_0 g)(x, 1) = 0, \qquad (T_1 g)(x, 1) = 2(x - 1),$$
$$(T_2 g)(x, 1) = 2(x - 1)^2 + 2(x - 1), \qquad (T_3 g)(x, 1) = (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + 2(x - 1).$$

(b) Nach dem Satz von Taylor mit der Restglieddarstellung von Lagrange gibt es für jedes $x \in [0, \pi/4]$ ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$(R_3 f)(x, 0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = \frac{1}{24} \sin(\xi) x^4.$$

Also gilt für all diese x

$$|(R_3 f)(x, 0)| \leq \frac{1}{24} \sin(\pi/4) \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{\pi^4}{24 \cdot \sqrt{2} \cdot 256} \leq \frac{3125}{217728} \leq 0,015,$$

wobei wir $\pi \leq 10/3$ und $\sqrt{2} \geq 14/10$ abgeschätzt haben.

Die Abschätzung für g ist so einfach wie gut. Da $g^{(4)}(x) = 0$ ist, gilt sofort $(R_3 g)(x, 1) = 0$, d.h. es ist $(T_3 g)(x, 1) = g(x)$, was bei einem Polynom dritten Grades ja auch kein großes Wunder ist.

(G 2)

Bestimmen Sie den Wert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} ist, durch ein geeignetes Taylor-Polynom.

Lösung: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{7}{5}(1 - x)^{-1/2}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{50}\right]$$

und ihre Taylorpolynome $(T_n f)(x, 0)$ mit Entwicklungsstelle 0. Dann gilt $\sqrt{2} = f(1/50)$. Da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - x)^{-3/2}(-1) = \frac{7}{10}(1 - x)^{-3/2} \\ f''(x) &= \frac{21}{20}(1 - x)^{-5/2} \\ f'''(x) &= \frac{105}{40}(1 - x)^{-7/2} \end{aligned}$$

gilt, haben wir $f(0) = \frac{7}{5}$, $f'(0) = \frac{7}{10}$ und $f''(0) = \frac{21}{20}$. Also gilt

$$(T_2 f)(x, 0) = \frac{21}{40} x^2 + \frac{7}{10} x + \frac{7}{5}.$$

Mit der Restgliedabschätzung von Lagrange erhalten wir

$$(R_2 f)(1/50, 0) = \frac{f'''(\xi)}{6} \left(\frac{1}{50}\right)^3$$

für ein $\xi \in (0, 1/50)$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$|\sqrt{2} - (T_2 f)(1/50, 0)| = |(R_2 f)(1/50, 0)| \leq \left| \frac{105}{40 \cdot 6 \cdot 50^3} (1 - \xi)^{-7/2} \right|.$$

Nun ist die Funktion $x \mapsto (1 - x)^{-7/2}$ auf dem Intervall $(0, 1/50)$ positiv und monoton wachsend, denn ihre Ableitung ist $x \mapsto 7/2 \cdot (1 - x)^{-9/2}$ und diese Funktion ist auf dem betrachteten Intervall positiv. Also wird obige Abschätzung für $\xi = 1/50$ maximal und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - (T_2 f)(1/50)| &\leq \frac{7}{16 \cdot 50^3} \left(\frac{50}{49}\right)^{7/2} = \frac{50^{7/2}}{16 \cdot 50^3 \cdot 7^6} = \frac{\sqrt{50}}{16 \cdot 7^6} \leq \frac{1}{2 \cdot 7^6} \\ &= \frac{1}{235.298} = \frac{5}{1.176.490} \leq \frac{5}{1.000.000} = 5 \cdot 10^{-6} \leq 10^{-5}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(T_2 f)(1/50, 0) = \frac{21}{40} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{50} + \frac{7}{5} = \frac{141.421}{100.000} = 1,41421$$

eine Näherung von $\sqrt{2}$ mit der geforderten Genauigkeit.

(G 3)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ a, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Für welche Werte von a ist f konvex auf $[0,1]$?

LÖSUNG: *Behauptung:* f ist genau dann konvex, wenn $a \geq 1$ ist.

Beweis: In allen Punkten $x \in [0,1)$ ist f zweimal stetig differenzierbar und es ist dort $f''(x) = 2 \geq 0$. Also ist f hier konvex, d.h. für alle $x, y \in [0,1)$ gilt

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1}$$

für alle $\lambda \in [0,1]$. Für Konvexität auf $[0,1]$ benötigen wir die selbe Ungleichung für alle $x, y \in [0,1]$.

Wir betrachten zunächst den Fall $a < 0$. Dann gilt mit $x = 0$, $y = 1$ und $\lambda = 1/2$ sofort

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \frac{1}{4} > \frac{a}{2} = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

also ist f in diesem Falle nicht konvex.

Ist $0 < a < 1$ so wählen wir $x = \sqrt{a}$, $y = 1$ und $\lambda = 1/2$. Dann gilt dieses Mal

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = f\left(\frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(a + 2\sqrt{a} + 1).$$

Da $a \in (0,1)$ ist, gilt zum Einen $1 > a$, zum Anderen aber auch $\sqrt{a} > a$, also haben wir

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) > \frac{1}{4}(a + 2a + a) = a = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

womit auch in diesem Falle f nicht konvex ist.

Es bleibt der Fall $a \geq 1$. Um hier Konvexität zu zeigen, genügt es wegen (1) die entsprechende Ungleichung für $y = 1$ zu zeigen. Es gilt für alle $x \in [0,1)$ und alle $\lambda \in (0,1]$ (Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial)

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda) \cdot 1\big) = \big(\lambda x + (1-\lambda)\big)^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2.$$

Unser Ziel ist nun

$$\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)a = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(1) \tag{2}$$

zu zeigen. Also rechnen wir

$$\begin{aligned} \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 &= \lambda x^2 + (\lambda^2 - \lambda)x^2 + 2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda)\big[-\lambda x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda\big]. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Longrightarrow -\lambda x^2 + 2\lambda x - \lambda + 1 \leq 1 \leq a.$$

Kombiniert man die beiden letzten Erkenntnisse, so erhält man genau (2) und wir sind fertig.

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Taylorreihe $(Tf)(x,a)$ von $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius dieser Reihe.

Bemerkung: Natürlich kennen wir über die geometrische Reihe eine Reihendarstellung dieser Funktion. Nächste Woche können wir auch beweisen, dass die Reihendarstellung einer Funktion, sofern sie existiert, eindeutig ist. Bis dahin bleibt leider nichts anderes übrig als die Taylorreihe von Hand auszurechnen.

LÖSUNG: Wir beweisen zunächst per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^1}$$

Induktionsvorraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Induktionsschritt: Es ist dann

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = n!(-n-1)(1-x)^{-n-2}(-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}},$$

was zu zeigen war.

Damit gilt nun für $a \neq 1$

$$(T_n f)(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(1-a)^{k+1}k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1-a)^{k+1}}(x-a)^k$$

und wir erhalten für die Taylorreihe

$$(Tf)(x,a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{k+1}}(x-a)^k.$$

Der Konvergenzradius ϱ dieser Reihe ergibt sich mit dem Wurzelkriterium:

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{|(1-a)^{k+1}|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{|1-a|}} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{|1-a|^k}} = 1 \cdot \frac{1}{|1-a|} = \frac{1}{|1-a|},$$

also $\varrho = |1-a|$.

Noch ein Kommentar zum Schluss: Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir sehr schnell für $a \neq 1$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a-(x-a)} = \frac{1}{(1-a)\left(1-\frac{x-a}{1-a}\right)} = \frac{1}{1-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x-a}{1-a}\right)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{k+1}}(x-a)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, für die $|x-a|/|1-a| < 1$, d.h. $|x-a| < |1-a|$ gilt. D.h. wir haben genau obiges Ergebnis. Das ist eine sehr angenehme Art und Weise (wenn man denn eine Reihenentwicklung hat, die man kennt), um Taylorreihen auszurechnen. Uns fehlen nur leider im Moment noch die Mittel, um nachzuweisen, dass wir so genau bei der Taylorreihe landen. Den Nachweis, dass die Reihendarstellung einer Funktion (wenn sie existiert) eindeutig ist, können wir erst führen, wenn wir den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz haben.

(H 2)

Bestimmen Sie den Wert $1,05^{1,02}$ mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

Lösung: Wir verwenden die Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{1,02}$ und betrachten ihr Taylorpolynom 1. Ordnung mit Entwicklungsstelle 1. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = 1,02 \cdot x^{0,02} \qquad f''(x) = 1,02 \cdot 0,02 \cdot x^{-0,98}$$

und $f(1) = 1$, sowie $f'(1) = 1,02$. Damit gilt

$$(T_1 f)(x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 1,02(x-1).$$

Für den Näherungsfehler $(R_1 f)(1,05;1)$, der uns interessiert, erhalten wir

$$(R_1 f)(1,05;1) = \frac{1}{2} f''(\xi)(1,05-1)^2 = 1,02 \cdot 0,01 \cdot \xi^{-0,98} \cdot 0,05^2 = 2,55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0,98}$$

für ein $\xi \in (1;1,05)$. Nun ist die Funktion $g(t) := t^{-0,98}$ auf dem Intervall $(1;1,05)$ monton fallend, denn für die Ableitung gilt auf diesem Intervall $g'(t) = -0,98 \cdot t^{-1,98} < 0$. Also nimmt g auf dem Intervall $(1;1,05)$ maximal den Wert $g(1) = 1$ an und wir können

$$|(R_1 f)(1,05;1)| = 2,55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0,98} \leq 2,55 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

abschätzen. Damit ist der Wert

$$(T_1 f)(1,05;1) = 1 + 1,02(1,05-1) = 1 + 1,02 \cdot 0,05 = 1,051$$

ein für die Aufgabenstellung ausreichend exakter Näherungswert von $1,05^{1,02}$.

(H 3)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie

(a) Hat f in einem Punkt $x_0 \in D$ ein lokales Minimum, so ist dieses das globale Minimum.

(b) Hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum, so ist f in einer Umgebung von x_0 konstant.

Lösung: (a) *Behauptung*: f hat in x_0 lokales Minimum $\Longrightarrow$ f hat in x_0 globales Minimum.

Beweis: Sei $x \in D\setminus\{x_0\}$ beliebig. Da f in x_0 ein lokales Minimum hat, gibt es eine Umgebung U von x_0, so dass $f(y) \geq f(x_0)$ für alle $y \in U \cap D$ gilt und da D offen ist, gibt es also ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $\delta > 0$, so dass $f(y) \geq f(x_0)$ für alle y aus diesem Intervall gilt. Wir wählen nun speziell ein y aus diesem Intervall, das zwischen x_0 und dem vorgegebenen x liegt. Setzen wir damit $\lambda = (y - x_0)/(x - x_0)$, so gilt $\lambda \in (0,1)$ und $y = \lambda x + (1-\lambda)x_0$. Da f konvex ist, folgt damit

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0),$$

d.h.

$$\lambda f(x) \geq f(y) - (1-\lambda) f(x_0) \geq f(x_0) - (1-\lambda) f(x_0) = \lambda f(x_0).$$

Damit gilt wegen $\lambda \neq 0$ nun $f(x) \geq f(x_0)$ und da x beliebig war, sind wir fertig. $\square$

(b) *Behauptung*: f hat in $x_0 \in D$ lokales Maximum $\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Beweis: Da f in x_0 ein lokales Maximum hat und D offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ ist und $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ gilt. Wählen wir nun ein beliebiges $x \in U$ und setzen $y := 2x_0 - x$, so gilt zum einen

$$|x_0 - y| = |x_0 - 2x_0 + x| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

d.h. es gilt auch $y \in U$. Zum anderen gilt $x_0 = 1/2 \cdot x + 1/2 \cdot y$, d.h. wir erhalten aus der Konvexität von f:

$$f(x_0) = f\big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\big) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Da $y \in U$ ist, haben wir $f(y) \leq f(x_0)$, also gilt

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_0), \quad \text{d.h.} \quad f(x_0) \leq f(x).$$

Da $x \in U$ ist, gilt aber auch $f(x_0) \geq f(x)$ und damit $f(x_0) = f(x)$. $\square$