Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 17.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Beweisen Sie, dass die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ stetig, surjektiv und streng monoton wachsend ist (und zeigen Sie damit Lemma III.4.12 b)).

LÖSUNG: Nach Theorem III.4.2 ist der Sinus auf ganz $\mathbb{C}$ stetig, insbesondere gilt dieses also auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Weiter erhalten wir wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ mit Hilfe von Korollar III.4.3 (a) $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und es folgt mit Hilfe von

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

dass $\sin x \in [-1, 1]$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt. Also erhalten wir mit dem Zwischenwertsatz, dass $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ ist und damit die Surjektivität von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Die Betrachtungen im Skript nach dem Beweis von Lemma III.4.7 zeigen, dass cos auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend ist. Weiter ist nach Korollar 4.11 a) i) und da cos eine gerade Funktion ist

$$\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi - x).$$

Da für $x, y \in [\pi/2, \pi]$ mit $x < y$ gilt $\pi - x, \pi - y \in [0, \pi/2] \subseteq [0, 2]$, ist folglich

$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) > -\cos(\pi - y) = \cos(y).$$

Also ist der Cosinus auch auf dem Intervall $[\pi/2, \pi]$ streng monoton fallend und wir erhalten diese Eigenschaft sogar auf dem ganzen Intervall $[0, \pi]$.

Seien nun $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $x < y$ gegeben. Dann gilt $x + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ und $y + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, also haben wir

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) > \cos(y + \frac{\pi}{2}).$$

Korollar III.4.11 (a) liefert dann

$$\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) < -\cos(y + \frac{\pi}{2}) = \sin y,$$

womit $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend ist.

(G 2)

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^{517}$ und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Skizzieren Sie die fünften Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen zunächst, dass $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. Nach Theorem III.4.4 haben wir

$$\cos(2x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x.$$

Wir wissen bereits, dass $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist, also erhalten wir damit

$$\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = 0,$$

d.h.

$$\cos^2\frac{\pi}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4}.$$

Weiter ist

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1,$$

womit $\cos\frac{\pi}{4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{\pi}{4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist. Da wir aber wissen, dass der Sinus auf dem Intervall $(0,2]$ positive Werte annimmt, ist damit $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Außerdem wissen wir, dass $\cos 0 = 1$ and $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist und der Cosinus auf $[0,2]$ streng monoton fallend ist. Also ist $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mit Hilfe dieser Vorbemerkung erhalten wir

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^{517} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{517} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}517\cdot\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}128\pi + \mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right).$$

(b)

(G 3)

Zeigen Sie die beiden folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z, \qquad z \in \mathbb{C}, \\ &\text{(b)} \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

LÖSUNG: (a) Dank Theorem III.4.4 haben wir für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2}$$

und da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ and $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist, erhalten wir damit

$$\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z,$$

was zu beweisen war.

(b) Wir berechnen für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh^2 z = \frac{1}{4}e^{2z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2z} = \frac{1}{2}(\cosh(2z)+1),$$

$$\sinh^2 z = \frac{1}{4}e^{2z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2z} = \frac{1}{2}(\cosh(2z)-1).$$

Damit ist

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Hausübungen

(H 1)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, bzw. begründen Sie die Nichtexistenz.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2} &= \frac{x+2-(3x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})} \\ &= \frac{-2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}, \end{aligned}$$

also ist

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}} = \frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Ist $x \neq 0$, so haben wir

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots .$$

Also ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

(H 2)

Es seien zwei Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ and $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$, falls sie existieren.

(c) Sind f und/oder g jeweils stetig in 0?

LÖSUNG: (a)

(b) Zur Untersuchung des ersten Grenzwertes betrachten wir die Folge $x_n := \frac{2}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Aber die Folge $\left(\sin \frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn es gilt $\left|\sin \frac{1}{x_n}\right| = \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| = 1$ für ungerade n und $\left|\sin \frac{1}{x_n}\right| = \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| = 0$ für gerade n. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

nicht.

Wir wenden uns dem Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

zu. Es ist $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, also gilt

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \le |x|$$

für diese $x \in \mathbb{R}$. Damit haben wir

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = 0.$$

(c) Die Funktion f ist nicht stetig in 0, denn wir haben in (b) ja eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich von f konstruiert, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} \not\to 0 = f(0)$ gilt.

Da nach (b)

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

ist, wissen wir, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich von g mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

auch

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$$

gilt. Also ist g stetig in 0.

(H 3)

Es seien $z \in \mathbb{C}$ und $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Geben Sie Darstellungen für $\mathrm{Re}(\sin z)$ und $\mathrm{Im}(\sin z)$ mit Hilfe der Funktionen sin, cos, sinh und cosh an. Zeigen Sie damit, dass

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

gilt.

Lösung: Nach Theorem III.4.4 gilt für jedes $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y).$$

Außerdem ist $\cos(\mathrm{i}y) = \cosh y$ und $-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}y) = \sinh y$, d.h. $\sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\sinh y$. Das impliziert

$$\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y$$

und da wegen $x, y \in \mathbb{R}$ auch $\sin x \cosh y \in \mathbb{R}$ und $\cos x \sinh y \in \mathbb{R}$ gilt, schließen wir

$$\mathrm{Re}(\sin z) = \mathrm{Re}(\sin(x + \mathrm{i}y)) = \sin x \cosh y,$$

und

$$\mathrm{Im}(\sin z) = \mathrm{Im}(\sin(x + \mathrm{i}y)) = \cos x \sinh y.$$

Wir können uns also daran machen

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

zu beweisen. Mit Hilfe des bereits gezeigten erhalten wir

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \left(\sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y}\right)^2 \\ &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= (\sin^2 x \cosh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y) + (\sin^2 x \sinh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y). \end{aligned}$$

Verwendet man nun noch $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, so gilt damit

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

und wir sind fertig.