Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 10.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Minitest. Bearbeitungszeit nicht mehr als 5 Minuten.)

Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	offen
$(0,1) \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2] \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$				
$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{R}$				
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2) \subseteq \mathbb{R}$				

Lösung:

	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	offen
$(0,1) \subseteq \mathbb{R}$		x		x
$[1,2] \subseteq \mathbb{R}$	x	x	x	
$[1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$	x	x	x	
$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{R}$				x
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$	x			
$[1,2) \subseteq \mathbb{R}$		x		

(G 2)

Wir definieren eine Folge von Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$ in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} C_0 &:= [0,1], \\ C_1 &:= C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ C_2 &:= C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein konstruieren wir C_{n+1}, indem wir von jedem der 2^n Intervalle, aus denen C_n besteht, jeweils das offene mittlere Drittel entfernen. Dann ist die *Cantormenge* C gegeben durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie, dass C kompakt ist und dass $C^\circ = \emptyset$ gilt.

LÖSUNG: Für die Kompaktheit von C reicht es nach dem Satz von Heine-Borel aus, Abgeschlossenheit und Beschränktheit zu zeigen.

C ist offensichtlich in $[0,1]$ enthalten und damit beschränkt. Wir zeigen also, dass C abgeschlossen ist.

Dazu sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, jeweils die Vereinigung der 2^n Intervalle, die bei der Konstruktion von C_{n+1} aus C_n entfernt wurden. Es gilt also $C_{n+1} = C_n \setminus U_n$. Wir zeigen nun, dass damit

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n,$$

gilt. Dazu zeigen wir beide Mengeninklusionen.

„$\subseteq$“ Ist $x \in C$, so gilt $x \in C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x \in C_n \setminus U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir $x \notin U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da offensichtlich $x \in [0,1]$ ist, haben wir

$$x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n,$$

und schließlich

$$C \subseteq [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n.$$

„$\supseteq$“ Ist $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, so gilt $x \notin U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir nun an, x wäre nicht in C, so gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin C_{n_0}$, insbesondere können wir ein minimales n_0 mit dieser Eigenschaft wählen, d.h. es gilt $x \in C_{n_0-1} \setminus C_{n_0} = U_{n_0-1}$, was nicht sein kann, da x in keinem U_n liegt. Also ist x in C, d.h.

$$[0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \subseteq C.$$

Damit gilt $[0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = C$, wie behauptet.

Die Menge U_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen, denn sie ist die Vereinigung offener Intervalle. Damit ist nach Theorem III.2.5 auch $\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ offen. Also erhalten wir schließlich, dass

$$\mathbb{R} \setminus C = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup (1, \infty)$$

ebenfalls offen ist, was die Abgeschlossenheit von C impliziert.

Es bleibt zu zeigen, dass $C^\circ = \emptyset$ gilt. Jede Menge C_n besteht aus 2^n disjunkten Intervallen der Länge $(\frac{1}{3})^n$. Die Summe der Längen dieser 2^n Intervalle ist also $(\frac{2}{3})^n$. Wir nehmen nun an, dass ein Intervall I der Länge $\delta > 0$ mit $I \subseteq C$ existiert. Da die Folge $((\frac{2}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{2}{3})^{N_0} < \delta$. Da nach Annahme $I \subseteq C \subseteq C_{N_0}$ gilt, muss aber die Summe $(\frac{2}{3})^{N_0}$ der Intervalllängen in C_{N_0} größer als δ sein. Wir haben also einen Widerspruch, woraus folgt, dass C kein Intervall enthält. Wäre aber x ein innerer Punkt von C, so müsste ein Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ in C liegen. Also gilt $C^\circ = \emptyset$.

(G 3)

(a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende Implikationskette.

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \Rightarrow \ f \text{ gleichmäßig stetig} \Rightarrow \ f \text{ stetig}.$$

(b) Es sei

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(c) Es sei

$$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist (Die, die im Tutorium schon gezeigt haben, dass g nicht Lipschitz-stetig ist, können sich freuen und dafür die gleichmäßige Stetigkeit besonders schön aufschreiben).

LÖSUNG: (a) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist nach Satz 1.2 auch stetig, denn auch ein Universaldelta ist ein Delta. Wir beweisen also noch, dass Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit impliziert. Es sei also f eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Dann gilt für alle $x, y \in M$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und setze $\delta := \varepsilon/L$. Ist dann $|x - y| < \delta$, so haben wir

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion f ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig (man beachte, dass Null nicht im Definitionsbereich liegt). Um zu zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, wählen wir $\varepsilon = 3$ und zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ Zahlen $x, y \in (0,1]$ existieren, für die $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ gilt. Sei also ein beliebiges $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen dazu nun $0 < x < \min\{1, \delta\}$ und setzen $y = x/2$. Dann gilt $x, y \in (0,1]$, $|x - y| = x/2 < \delta$ und $|f(x) - f(y)| = 3/x^2 > 3 = \varepsilon$.

(c) Wir zeigen, dass g gleichmäßig stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann setzen wir $\delta := \varepsilon^2$ und betrachten $x, y \in [0,\infty)$ mit $|x - y| < \delta$. Es treten nun zwei Fälle auf.

1. $x, y < \delta$. Dann gilt $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in [0, \varepsilon)$ und damit

$$|g(x) - g(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon.$$

2. $x \geq \delta$ oder $y \geq \delta$. Dann ist $\sqrt{x} \geq \varepsilon$ oder $\sqrt{y} \geq \varepsilon$, d.h. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \varepsilon$. Damit folgt

$$|g(x) - g(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Zusammengenommen ist damit g gleichmäßig stetig.

Dass g nicht Lipschitz-stetig ist, findet sich in der Musterlösung von Tutorium 8.

Hausübungen

(H 1)

(a) Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r. Zeigen Sie, dass $B_r(x)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

(b) Zeigen Sie für beliebige Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen und beweisen Sie damit Bemerkung III.2.8.

(i) Es gilt $M^\circ = \bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O.$

(ii) $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M = \bigcap_{M \subseteq A,\, A \text{ abgeschlossen}} A.$

(iii) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}.$

Lösung: (a) Sei $y \in B_r(x)$ beliebig. Dann gilt $|y - x| < r$, d.h. $r - |y - x| > 0$. Wir setzen nun $\varepsilon = r - |y - x|$ und wollen zeigen, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq B_r(x)$ gilt. Ist $u \in B_\varepsilon(y)$, so haben wir $|u - y| < \varepsilon$, also

$$|u - x| \leq |u - y| + |y - x| < \varepsilon + |y - x| = r.$$

Damit gilt $u \in B_r(x)$ und $B_r(x)$ ist offen.

(b) (i) Nach Definition gilt $M^\circ = M \setminus \partial M$, wobei $x \in \partial M$ ist, genau dann wenn jede Umgebung U von x einen Punkt aus M und einen aus M^c enthält. Also ist ein Punkt $x \in M$ genau dann *nicht* in ∂M, wenn es eine Umgebung U von x gibt, für die $U \cap M^c = \emptyset$ gilt. Diese Überlegung liefert uns

$$x \in M^\circ \;\Leftrightarrow\; x \in M \text{ und es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } U \subseteq M.$$

Sei nun $x \in M^\circ$. Dann gibt es demnach ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq M$, d.h. M° ist offen. Also gilt

$$M^\circ \subseteq \bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O.$$

Ist umgekehrt

$$x \in \bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O,$$

so gibt es eine offene Menge $O \subseteq M$ mit $x \in O$. Also ist $x \in M$ und O ist eine Umgebung von x mit $O \cap M^c = \emptyset$, womit obige Überlegung wieder $x \notin \partial M$ impliziert. Damit ist schließlich $x \in M \setminus \partial M = M^\circ$, also haben wir die umgekehrte Inklusion

$$\bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O \subseteq M^\circ$$

erreicht und sind fertig.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$ ist. Sei also $x \in \overline{M}$. Da $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist, erhalten wir sofort $M \subseteq M^\circ \cup \partial M$. Es bleibt also hier nur noch der Fall $x \in \overline{M}$ mit $x \notin M$ zu untersuchen. In diesem Fall ist x ein Häufungspunkt von M, d.h. in jeder Umgebung U von x gibt es unendlich viele $y \in U \cap M$. Sei nun U eine beliebige Umgebung von x. Dann ist $x \in U \cap M^c$ und es existiert ein $y \in U \cap M$. Somit ist x ein Randpunkt von M, d.h. $x \in \partial M$. Somit folgt

$$\overline{M} \subseteq M^\circ \cup \partial M$$

und damit die erste Inklusion.

Sei nun umgekehrt $x \in M^\circ \cup \partial M$. Ist $x \in M$, so gilt sofort $x \in \overline{M}$. Wir betrachten also den Fall $x \notin M$. Dann ist $x \notin M^\circ$, und damit $x \in \partial M$. Nehmen wir an, dass x kein Häufungspunkt von M ist, so gibt es eine Umgebung U von x, für die nur endlich viele Elemente in $U \cap M$ liegen. Dann ist

$$a := \inf\{|y - x| : y \in M \cap U\} > 0.$$

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < a$ gewählt und ein weiteres $\varepsilon' > 0$ erfülle $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq U$. Schließlich setzen wir $\varepsilon'' := \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann ist $B_{\varepsilon''}(x)$ eine Umgebung von x und es gilt $B_{\varepsilon''}(x) \cap M = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch zu $x \in \partial M$, also ist x ein Häufungspunkt von M, d.h. $x \in \overline{M}$. Damit ist

$$M^\circ \cup \partial M \subseteq \overline{M}$$

gezeigt, so dass zusammen mit der oben schon bewiesenen umgekehrten Inklusion gilt

$$M^\circ \cup \partial M = \overline{M}.$$

Wir wenden uns der Behauptung

$$\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A$$

zu. Sei dazu $x \in \overline{M}$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: $x \in M$. Dann gilt $x \in A$ für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq A$, insbesondere gilt also

$$x \in \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A.$$

Fall 2: $x \notin M$. Dann ist x ein Häufungspunkt von M. Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $M \subseteq A$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein $x_n \in M$ mit $x_n \in B_{1/n}(x)$. Das ist möglich, da x ein Häufungspunkt von M ist. Nun gilt $x_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Da A abgeschlossen ist, gilt damit $x \in A$. Also ist

$$x \in \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A,$$

und wir haben

$$\overline{M} \subseteq \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A$$

erreicht.

Es bleibt schließlich noch die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Sei dazu

$$x \in \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A$$

gegeben. Nehmen wir an es wäre $x \notin M$ und x wäre auch kein Häufungspunkt von M, so gibt es eine Umgebung U von x, für die nur endlich viele Elemente in $U \cap M$ liegen. Wir können also ein $\varepsilon > 0$ wählen, so dass

$$\varepsilon < \inf\{|x - y| : y \in U \cap M\}$$

gilt. Sei weiter ein $\varepsilon' > 0$ mit $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq U$ gegeben und setze $\varepsilon'' := \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann ist $B_{\varepsilon''}(x)$ eine offene Umgebung von x mit $B_{\varepsilon''}(x) \cap M = \emptyset$. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon''}(x)$ abgeschlossen, es gilt $x \notin \mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon''}(x)$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon''}(x)$ ist erfüllt. Das ist ein Widerspruch dazu, dasss $x \in A$ für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq A$ gilt. Also gilt entweder $x \in M$ oder x ist ein Häufungspunkt von M. Damit ist $x \in \overline{M}$, d.h.

$$\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq A,\ A \text{ abg.}} A.$$

Zusammen mit $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$ haben wir damit unser Ziel erreicht.

(iii) Sei $x \in \partial M$. Dann gibt es in jeder Umgebung U von x ein $y \in U \cap M$. Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge mit $M \subseteq A$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein

$$y_n \in B_{1/n}(x) \cap M \subseteq B_{1/n}(x) \cap A$$

gewählt. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ und, da A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$. Mit Hilfe von (b) haben wir damit $x \in \overline{M}$. In der gleichen Weise gibt es in jeder Umgebung U von x ein $y \in U \cap (\mathbb{R}^n \setminus M)$. Betrachten wir nun eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \setminus M \subseteq A$ und wählen wieder für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein

$$y_n \in B_{1/n}(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \subseteq A,$$

so gilt wieder $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Also ist wieder $x \in A$ und damit $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$ mit Hilfe von (b). Das liefert uns die erste Inklusion

$$\partial M \subseteq \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$$

es bleibt also noch die umgekehrte zu zeigen.

Sei dazu $x \in \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$. Dann gilt nach (b)

$$x \in (M^\circ \cup \partial M) \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}.$$

Nehmen wir nun an, es wäre $x \notin \partial M$, dann gilt $x \in M^\circ \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$, d.h. es gilt $x \in M^\circ$ und entweder $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ oder x ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^n \setminus M$. Da $x \in M^\circ$ ist, gibt es eine offene Menge $O \subseteq M$ mit $x \in O$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^n \setminus M$ gilt nun $y \in \mathbb{R}^n$ und $y \notin M$ und damit $y \notin O$. Das bedeutet $\mathbb{R}^n \setminus M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus O$, woraus wir ersehen, dass O eine Umgebung von x mit $O \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) = \emptyset$ ist. Daraus folgt aber, dass $x \notin \mathbb{R}^n \setminus M$ gilt und dass x kein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist. Das kann aber nicht sein, denn es war ja gerade $x \in \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$ vorausgesetzt. Diesen Widerspruch können wir nur auflösen, wenn $x \in \partial M$ ist. Also haben wir

$$\overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M} \subseteq \partial M$$

und damit

$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M},$$

wie gewünscht.

(H 2)

Es sei $x_n := 1 - 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit definieren wir die Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (-1)^{n+1}(2n^2 - 1)x + (-1)^n 2n(n - 1), \text{ falls } x \in [x_n, x_{n+1}).$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion f stetig und beschränkt ist, dass sie aber weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum hat.

(c) Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

(d) Weisen Sie nach, dass man f nicht so nach $[0, 1]$ fortsetzen kann, dass die fortgesetzte Funktion ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.

Lösung: (a)

(b) Wir beweisen zunächst die Stetigkeit von f. In allen Punkten x mit $x \in (x_n, x_{n+1})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist f ein Polynom ersten Grades und damit stetig. Es bleibt also nur die Stetigkeit von f in den Punkten x_n, $n \in \mathbb{N}$, zu sichern, d.h. wir müssen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to x_n - 0} f(x) = \lim_{x \to x_n + 0} f(x) = f(x_n)$$

gilt. Es ist $f(x_n) = (-1)^n x_n = (-1)^n (n-1)/n$ und

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_n + 0} f(x) &= \lim_{x \to x_n + 0} \big((-1)^{n+1}(2n^2 - 1)x + (-1)^n 2n(n-1)\big) \\ &= (-1)^{n+1}(2n^2 - 1)x_n + (-1)^n 2n(n-1) = f(x_n),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_n - 0} f(x) &= \lim_{x \to x_n - 0} \big((-1)^n(2(n-1)^2 - 1)x + (-1)^{n-1}2(n-1)(n-2)\big) \\ &= (-1)^n \big(\big(2(n^2 - 2n + 1) - 1\big)x_n - 2(n-1)(n-2)\big) \\ &= (-1)^n \frac{n-1}{n}\big(2n^2 - 4n + 1 - 2n(n-2)\big) = (-1)^n x_n = f(x_n),\end{aligned}$$

also ist f stetig.

Für die Beschränktheit zeigen wir, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1)$ gilt. Sei also $x \in [0,1)$ vorgegeben und n so gewählt, dass $x \in [x_n, x_{n+1})$ gilt. Die Funktion f ist auf dem Intervall $[x_n, x_{n+1})$ durch ein Polynom ersten Grades $a_1 x + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ gegeben. Also ist sie auf diesem Intervall streng monoton, denn aus $y < z$ folgt $a_1 y + a_0 < a_1 z + a_0$, falls $a_1 > 0$ und $a_1 y + a_0 > a_1 z + a_0$, falls $a_1 < 0$. Also ist $\min\{f(x_n), f(x_{n+1}\} \leq f(x) \leq \max\{f(x_n), f(x_{n+1})\}$ und wegen $|f(x_k)| = |(-1)^k x_k| = x_k \leq 1$ ist damit $|f(x)| \leq 1$.

Wir nehmen nun an, es gäbe ein $a \in [0,1)$ für das $f(a) = \max_{x \in [0,1)} f(x)$ gilt. Dann gibt es entweder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a = x_n$ oder $a \in (x_n, x_{n+1})$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Ist $a = x_n$, so muss n auf jeden Fall gerade sein, denn sonst wäre $f(a) \leq 0$, und da $f(1/2) = 1/2 > 0$ ist, kann dann f in a nicht maximal sein. Damit ist auch $n + 2$ gerade und wir erhalten $f(x_{n+2}) = 1 - 1/(n+2) > 1 - 1/n = f(a)$, im Widerspruch zu $f(a) = \max_{x \in [0,1)} f(x)$. Wir wenden uns also dem Fall $a \in (x_n, x_{n+1})$ zu. Dann gilt $\max\{f(x_n), f(x_{n+1})\} > f(a)$, was ebenfalls zu einem Widerspruch führt.

Schließlich nehmen wir analog an, es gäbe ein $b \in [0,1)$ mit $f(b) = \min_{x \in [0,1)} f(x)$. Dann gibt es wieder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b = x_n$ oder $b \in (x_n, x_{n+1})$. Für $b = x_n$ muss n dieses Mal ungerade sein, denn anderenfalls gilt $f(b) \geq 0$, was wegen $f(2/3) = -2/3 < 0$ kein Minimalwert der Funktion sein kann. Damit bekommen wir wie oben den Widerspruch $f(x_{n+2}) = 1/(n+2) - 1 < 1/n - 1 = f(b)$. Für $b \in (x_n, x_{n+1})$ gilt wieder $\min\{f(x_n), f(x_{n+1})\} < f(b)$, was ebenso einen Widerspruch zu $f(b) = \min_{x \in [0,1)} f(x)$ produziert.

(c) Die Aussage folgt aus (d), denn wäre die Funktion f gleichmäßig stetig, so hätte sie nach Satz III.3.16 eine stetige Fortsetzung auf das kompakte Intervall $[0,1]$. Diese Fortsetzung würde dann also dort nach Satz III.3.9 ihr Minimum und Maximum annehmen.

(d) Wir definieren alle möglichen Fortsetzungen von f in den Punkt 1 durch $f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_c(1) := c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist und $f_c(x) := f(x)$ für $x \in [0,1)$. Ist nun $c \geq 0$, so können wir wie in (b) zeigen, dass f_c kein globales Minimum in $[0,1]$ hat und wenn $c \leq 0$ ist, so folgt ebenso dass f_c in $[0,1]$ kein globales Maximum hat.

(H 3)

Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge G von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen geschrieben werden kann.

LÖSUNG: Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Für jedes $x \in G$ gibt es wegen der Offenheit von G ein offenes Intervall, das in G liegt und x enthält. Damit ist die Menge

$$\mathcal{I}_x := \{I \subseteq G : I \text{ offenes Intervall und } x \in G\}$$

nicht leer und wir können zu jedem $x \in G$ die Menge

$$I_x := \bigcup_{I \in \mathcal{I}_x} I$$

definieren. Dann ist I_x als Vereinigung offener Mengen auf jeden Fall offen.

Wir überlegen uns nun, dass I_x selbst wieder ein Intervall ist. Seien dazu $a = \inf I_x$, bzw $a = -\infty$, falls I_x nicht nach unten beschränkt ist, sowie $b = \sup I_x$, bzw. $b = \infty$, wenn I_x nicht nach oben beschränkt ist. Nun gilt offensichtlich $I_x \subseteq [a, b]$ und da I_x offen ist, muss sogar $I_x \subseteq (a, b)$ gelten. Wir zeigen also noch $(a, b) \subseteq I_x$. Sei dazu $y \in (a, b)$. Dann gilt entweder $a < x \leq y < b$ oder $a < y \leq x < b$. Im ersten Fall, wissen wir nach der Charakterisierung des Supremums, dass es ein $z \in I_x$ geben muss, für das $x \leq y < z < b$ gilt. Da $z \in I_x$ ist, muss es ein $I \in \mathcal{I}_x$ mit $z \in I$ geben. Da I aber ein Intervall ist, das sowohl x als auch z enthält, muss auch $y \in I$ sein, also gilt $y \in I_x$. Liegt y zwischen a und x, so bekommen wir über die entsprechende Charkaterisierung des Infimums ein $z \in I_x$ zwischen a und y und erhalten wieder genauso $y \in I_x$.

Sind nun $x, x' \in G$ zwei Zahlen mit $x \neq x'$, so gilt entweder $I_x \cap I_{x'} = \emptyset$ oder $I_x \cap I_{x'} \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, dass falls der Schnitt nicht leer ist, sofort $I_x = I_{x'}$ gelten muss. Tatsächlich ist in diesem Fall $I_0 := I_x \cup I_{x'}$ ein offenes Intervall in G, das sowohl x als auch x' enthält und wir bekommen deshalb

$$I_x \subseteq I_0 \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}_{x'}} I = I_{x'} \subseteq I_0 \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}_x} I = I_x$$

und damit $I_x = I_{x'}$.

Offensichtlich gilt damit $G = \bigcup_{x \in G} I_x$ und die Zerlegung ist disjunkt.