**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 3.12.2007

# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## Probeklausur mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ________________

Vorname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Fachrichtung: ________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | Gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mögl. Punktzahl | 9 | 16 | 12 | 11 | 48 | |
| err. Punktzahl | | | | | | |

**Aufgabe 1 (9 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Ungleichung $4n \leq 3^n - 12$ gilt.

Lösung: Induktionsanfang ($n = 3$): Es gilt $4 \cdot 3 = 12 \leq 15 = 3^3 - 12$. (**2 Punkte**)

Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Aussage $4n \leq 3^n - 12$ für ein $n \geq 3$ gilt und zeigen die Ungleichung für $n+1$. (**2 Punkte**)

Es gilt $4(n+1) + 12 = 4n + 16 \leq 3^n - 12 + 16 = 3^n + 4 \leq 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung und der Bedingung $n \geq 3$. Also gilt $4(n+1) \leq 3^{n+1}$. (**3 Punkte** für Rechnung)

Die Behauptung folgt nun mit vollständiger Induktion. (**2 Punkte**)

**Aufgabe 2 (16 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie eine wahre Aussage mit „w“ bzw. eine falsche mit „f“. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Eine nicht beantwortete Aussage wird mit 0 Punkten bewertet. Das Gesamtergebnis dieser Aufgabe ist mindestens 0 Punkte. Die Antworten in dieser Aufgabe müssen nicht begründet werden.

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen.

- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow$ $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert
- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert
- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_{2n}$ konvergiert
- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_{\varphi(n)}$ konvergiert für jede streng monoton wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert

(c) Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschränkte Mengen.

- ☐ $\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\}$ ist beschränkt
- ☐ $\{\frac{1}{x} : x > 0\}$ ist beschränkt
- ☐ $(\exists \varepsilon > 0\, \forall y \in Y :\ y \geq \varepsilon) \Rightarrow \sup\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot (\inf Y)^{-1}$
- ☐ $(\exists \varepsilon > 0\, \forall y \in Y :\ y \geq \varepsilon) \Rightarrow \sup\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot (\sup Y)^{-1}$

(d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ☐ $\exists C, \alpha > 0\, \forall x, y \in (a, b) :\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \Rightarrow f$ ist stetig
- ☐ $f$ ist stetig $\Rightarrow \exists C > 0\, \forall x, y \in (a, b) :\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$
- ☐ $f$ ist monoton wachsend $\Rightarrow f$ ist stetig
- ☐ Es gibt eine Konstante $M > 0$ so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist stetig

LÖSUNG: (a). w, f, f, f

(b). f, w, f, w

(c). f, f, w, f

(d). w, f, f, f

**Aufgabe 3 (12 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen und Reihen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \sqrt{n^2 + 7n + 5} - n$

(b) $b_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} 2^n x^{2n}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG: (a). Es gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2 + 7n + 5} - n \\
&= \frac{(\sqrt{n^2 + 7n + 5} - n)(\sqrt{n^2 + 7n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 + 7n + 5} + n} \\
&= \frac{n^2 + 7n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 7n + 5} + n} \\
&= \frac{7n + 5}{\sqrt{n^2 + 7n + 5} + n} \\
&= \frac{7 + 5/n}{\sqrt{1 + 7/n + 5/n^2} + 1}
\end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

Damit folgt, dass $(a_n)$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = 7/2$ gilt. (**2 Punkte**)

(b). Wir schreiben

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2n} \\ &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} \end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

Also konvergiert $(b_n)$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = e^{-2}$. (**1 Punkt**)

(c). Wir wenden das Wurzelkriterium an. (**1 Punkt**)

Wir setzen $c_n := \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} 2^n x^{2n}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot 2x^2.$$

(**1 Punkt**)

Da $\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n\to\infty)$ folgt, dass die Reihe konvergiert, falls $2x^2 < 1$, also $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, gilt. Ebenso folgt aus dem Wurzelkriterium, dass die Reihe divergiert, falls $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. (**1 Punkt**)

Für den Fall $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ beobachten wir, dass

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n\to\infty).$$

(**1 Punkt**)

Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n > n_0$ gilt

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} > 1$$

Also gilt

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{1}{n} > \frac{1}{n}, \qquad \text{für } n > n_0$$

und somit divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium. (**1 Punkt**)

Insgesamt folgt, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

## Aufgabe 4 (11 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Außerdem seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und es gelte $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

Zeigen Sie: $f$ besitzt mindestens einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

**Hinweis:** Betrachten Sie $z := \sup\{y \in [a, b] : y \leq f(y)\}$.

LÖSUNG: Es sei $M := \{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b,\ y \leq f(y)\}$. Es gilt dann $M \neq \emptyset$, da $a \in M$ (**1 Punkt**), außerdem ist $M$ beschränkt, da $a \leq y \leq b$ für alle $y \in M$ (**1 Punkt**). Wir setzen $z := \sup M$. Die Behauptung folgt nun, indem wir $f(z) = z$ beweisen. (**1 Punkt**)

1. Annahme $z > f(z)$. (**4 Punkte**)

Setze $\varepsilon := z - f(z)$. Nach der Charakterisierung des Supremums existiert ein $x \in M$ mit $x > z - \varepsilon = z - z + f(z) = f(z)$, da $z$ das Supremum von $M$ ist. Außerdem gilt wegen $x \in M$, dass $x \leq z$. Also folgt mit der Monotonie von $f$ die Ungleichung $f(x) \leq f(z)$. Also gilt $x > f(z) \geq f(x)$, was einen Widerspruch zu $x \in M$ liefert.

2. Annahme $z < f(z)$. (**4 Punkte**)

Dann existiert ein $x$ mit $z < x < f(z)$ und $x < f(z) \leq f(x)$, da $f$ monoton wachsend ist. Also gilt $x \in M$ und $z < x$, was wiederum einen Widerspruch liefert.

Damit sind beide Annahmen falsch und es folgt somit $f(z) = z$.

# Orientierungskolloquium

Montag, 10.12.2007 – 16:15-17:45 Uhr – S103/123

Prof. Dr. Regina Bruder

AG Didaktik

*Was wissen wir über „guten“Mathematikunterricht? - Ergebnisse aus aktuellen Studien der FG Fachdidaktik*