**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 26.11.2007

# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## 6. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1)**

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n + 1} z^{3n}$$

Untersuchen Sie außerdem für die Potenzreihen in (b) und (c) für welche $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises die Potenzreihe konvergiert.

LÖSUNG: (a) Wir verwenden das Quotientenkriterium und setzen hierzu $a_n := \frac{n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)! n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{1}{(n+1)} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Für den Konvergenzradius $\rho$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt dann nach Bemerkung 5.4

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \mathrm{e} = \rho$, sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \mathrm{e} = \rho$.

(b) Wir verwenden die Formel von Cauchy-Hadamard und erhalten für den Konvergenzradius

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^p}} = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} (\sqrt[n]{n})^p} = \frac{1}{(\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n})^p} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ konvergiert damit absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

Sei nun ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben. Dann gilt $|n^p z^n| = n^p |z|^n = n^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die summierte Folge ist in diesem Fall keine Nullfolge, die Reihe ist also für alle $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises divergent.

(c) Wir setzen $w := z^3$ und $a_n := 1/(7^n + 1)$. Dann hat die zu untersuchende Potenzreihe die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, so dass wir die Formel von Cauchy-Hadamrd anwenden können:

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n+1}}}.$$

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{7} = \sqrt[n]{\frac{1}{2 \cdot 7^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{7^n + 1}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{7^n}} = \frac{1}{7}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/2} = 1$ ist damit nach dem Sandwichsatz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n + 1}} = \frac{1}{7}.$$

Damit ist $\varrho = 7$ für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, diese konvergiert also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 7$ absolut und divergiert für $|w| > 7$. Mit $w = z^3$ ist damit die ursprüngliche Reihe absolut konvergent, wenn $|z| < \sqrt[3]{7}$ und divergent falls $|z| > \sqrt[3]{7}$ gilt. Somit ist der gesuchte Konvergenzradius $\sqrt[3]{7}$.

Wir untersuchen nun noch das Konvergenzverhalten der Reihe auf dem Rand des Konvergenzkreises. Sei dazu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \sqrt[3]{7}$ gegeben. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n z^{3n}| = \frac{1}{7^n + 1}|z|^{3n} = \frac{7^n}{7^n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{7^n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

also ist die summierte Folge in diesen Fällen keine Nullfolge, die Reihe divergiert somit für alle $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises.

## (G 2)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zu je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl $q$ mit $x < q < y$.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ irrational, so ist auch $q + px$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq 0$ irrational.

(c) Zu je zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es eine irrationale Zahl $x$ mit $p < x < q$.

(d) Die Dirichletsche Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* Für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < y$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

*Beweis:* Seien $x, y$ irrational mit $x < y$. Dann gilt $y - x > 0$, also gibt es nach dem Archimedischen Prinzip ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < y - x$. Mit diesem $k$ definieren wir die Menge

$$A := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq kx\}.$$

Diese ist nicht leer, denn sonst wäre $\mathbb{Z}$ nach oben durch $kx$ beschränkt, und nach unten durch $kx$ beschränkt. Also hat $A$ nach Satz I.1.12 f) ein kleinstes Element, das wir $m$ nennen. Wir zeigen nun, dass $q := m/k$ die gewünschten Eigenschaften hat. zum einen ist $q$ offensichtlich rational. Weiter ist $m \in A$, also haben wir $x \leq m/k = q$ (man beachte, dass $k > 0$ gilt) und da $x$ irrational ist, kann $x = q$ nicht sein, was $x < q$ liefert.

Weiter ist wegen der Minimalität von $m$ die Zahl $m - 1 \notin A$, es ist also $m - 1 < kx$, was $(m - 1)/k < x$ impliziert. Alles zusammengenommen haben wir nun

$$x < q = \frac{m}{k} = \frac{m-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y,$$

wie gefordert. □

(b) *Behauptung:* $x$ irrational, $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq 0 \Longrightarrow q + px$ irrational.

*Beweis:* Nehmen wir an, dass $q+px$ rational ist, d.h. $q+px = r$ für ein $r \in \mathbb{Q}$. Dann ist aber wegen $p \neq 0$

$$x = \frac{1}{p}(r-q) \in \mathbb{Q},$$

denn $Q$ ist ein Körper. Wir erhalten also den Widerspruch $x \in \mathbb{Q}$, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

(c) *Behauptung:* Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ existiert ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $p < x < q$.

*Beweis:* Wegen $p < q$ ist $(q-p)/3 > 0$ und da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, haben wir $(q-p)/3 \in \mathbb{Q}$. Weiter wissen wir nach Satz II.3.7, dass e irrational ist. Damit ist nach Teil b) dieser Aufgabe auch $\frac{q-p}{3}\mathrm{e} + p$ irrational und es gilt wegen $\mathrm{e} < 3$

$$p < p + \frac{q-p}{3}\mathrm{e} < q + (q-p) = q,$$

also leistet $x := (q-p)\mathrm{e}/3 + p$ das gewünschte. $\square$

(d) *Behauptung:* $f$ ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Beweis:* Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir nehmen an, $f$ wäre in $x_0$ stetig. Dann existiert nach Satz III.1.2 ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{1}$$

gilt.

Wir betrachten zunächst den Fall $x_0 \in \mathbb{Q}$. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \delta$, so dass $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Nun ist aber auch $x_0 + 1/n$ rational, also gibt es nach c) ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zwischen $x_0$ und $x_0 + 1/n$. Dieses ist dann insbesondere in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, aber es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zu (1).

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ist $\delta$ ebenfalls irrational, so liefert uns a) sofort die Existenz eines $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, für das wieder im Widerspruch zu (1)

$$|f(q) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$$

gilt. Es bleibt also nur noch der Fall $x_0$ irrational und $\delta$ rational übrig. Nehmen wir uns wieder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \delta$ her, so ist nach b) auch $x_0 + 1/n$ irrational und es gilt $x_0 < x_0 + 1/n < x_0 + \delta$. Also gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ zwischen $x_0$ und $x_0 + 1/n$ und wir haben $q \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Damit erhalten wir genauso wie oben einen Widerspruch zu (1). $\square$

## (G 3)

Bestimme mittels eines geeigneten Cauchyproduktes eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\varrho > 0$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < \varrho$$

gilt.

Lösung: Wir beobachten für $|z| < 1$ unter Zuhilfenahme des Cauchyprodukts zweier geometrischer Reihen

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Also leistet $a_n = n + 1$ das gewünschte mit $\varrho = 1$.

## Hausübungen

### (H 1)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(4+(-1)^n)^{3n}}, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n.$$

Untersuchen Sie außerdem für die Potenzreihen in (a) und (c) für welche $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises die Potenzreihe konvergiert.

LÖSUNG: (a) Wir wenden das Wurzelkriterium an und setzen hierzu $a_n := \frac{2^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition 5.2 gilt für den Konvergenzradius $\rho$ die Identität

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Es ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2.$$

Somit haben wir den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{2}$. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ absolut konvergent auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$ und divergent auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{2}\}$.

Wir untersuchen nun von Hand das Konvergenzverhalten auf dem Rande des Konvergenzkreises. Sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{2^n}{n^2} z^n \right| = \frac{2^n}{n^2} |z|^n = \frac{1}{n^2}.$$

Nun ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ bekanntermaßen absolut konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{2}$.

(b) Wir verwenden das Wurzelkriterium für Reihen. Dazu setzen wir

$$a_n := \frac{z^{4n+1}}{(4+(-1)^n)^{3n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und berechnen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|^{4+1/n}}{(4+(-1)^n)^3} = \begin{cases} \dfrac{|z|^{4+1/n}}{5^3}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \dfrac{|z|^{4+1/n}}{3^3}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt nun

$$\frac{|z|^{4+1/n}}{5^3} \leq \frac{|z|^{4+1/n}}{3^3},$$

also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|z|^{4+1/n}}{(4+(-1)^n)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{4+1/n}}{3^3} = \frac{|z|^4}{27}.$$

Weiter ist

$$\frac{|z|^4}{27} < 1 \iff |z|^4 < 27 \iff |z| < \sqrt[4]{27}$$

Also ist die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt[4]{27}$ absolut konvergent.

Außerdem gilt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \sqrt[4]{27}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|^{4+1/n}}{3^3} \geq \frac{27 \cdot \sqrt[4n]{27}}{27} \geq 1,$$

was nach dem Wurzelkriterium bedeutet, dass die Reihe in diesen Fällen divergiert. Also ist der Konvergenzradius $\sqrt[4]{27}$.

(c) Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt für den Konvergenzradius

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1/k}}.$$

Es gilt für alle $n \geq 3$

$$1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq \sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{1}} = \sqrt[n]{n}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist, haben wir nach dem Sandwichsatz damit auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1.$$

Also ist $\varrho = 1$.

Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben, so ist die summierte Folge wegen

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^n\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot |z|^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

divergent und damit sicher keine Nullfolge. Die Potenzreihe divergiert also für alle $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises.

## (H 2)

Zeigen Sie, dass $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0 \text{ minimal}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig in allen $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist.

LÖSUNG: *Behauptung:* $f$ ist stetig in allen irrationalen Punkten $x_0 \in [0,1]$.

*Beweis:* Sei $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.2 wollen wir zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) < \varepsilon$$

gilt für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Wir setzen

$$M_k := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq m \leq n \leq k\right\}.$$

Man beachte, dass $M_k$ nur *endlich viele* Elemente enthält, die alle rational sind. Nach Voraussetzung ist $x_0$ irrational, es gilt also $x_0 \notin M_k$ und da $M_k$ nur endlich viele Elemente hat, ist der Abstand $\delta := \min_{x_k \in M_k} |x_0 - x_k|$ echt positiv.

Nun gilt für alle $x \in [0,1]$ mit $|x_0 - x| < \delta$ auf jeden Fall $x \notin M_k$, also ist $f(x) = 0$, falls $x$ irrational und $f(x) = \frac{1}{q}$ mit $q > k$, falls $x$ rational ist. Zusammengenommen gilt $|f(x) - f(x_0)| \leq 1/k < \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$ und wir haben die Behauptung nachgewiesen. □

## (H 3)

(a) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Defintionsbereich stetig sind.

(i) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x},$ (ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(3x^2 - 7x) \cdot (x^2+1)}}{x^4+3}.$

(b) In jedem Punkt $x$ der Erdoberfläche bezeichne $T(x)$ die Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt an diesem Ort herrscht und $T$ sei eine stetige Funktion des Ortes $x$. Als Antipoden von $x$ bezeichnet man den Punkt $x_A$ der Erdoberfläche, der auf der Geraden durch $x$ und den Mittelpunkt der Erde gegenüber von $x$ liegt. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x$ auf der Erdoberfläche mit $T(x) = T(x_A)$ gibt.

LÖSUNG: (a) (i) *Behauptung:* $f$ ist stetig auf $[0, \infty)$.

*Beweis:* Es sei $x_0 \in [0, \infty)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $x \in (0, \infty)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &= \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\
&= \frac{\sqrt{|x - x_0|} \cdot \sqrt{|x - x_0|}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\
&\leq \sqrt{|x - x_0|}\frac{\sqrt{|x| + |x_0|}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \sqrt{|x - x_0|}\frac{\sqrt{x + x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2 = x + x_0 + 2\sqrt{x}\sqrt{x_0} \geq x + x_0$$

und wir erhalten $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geq \sqrt{x + x_0}$, d.h.

$$\frac{\sqrt{x + x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq 1$$

Zusammengenommen haben wir also

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{|x - x_0|}$$

und für $|x - x_0| < \delta := \varepsilon^2$ ist dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{|x - x_0|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Damit ist $f$ stetig. $\square$

(ii) *Behauptung:* $g$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

*Beweis:* Nach Beispiel III.1.7 a) ist $x \mapsto 3x^2 - 7x$ als Polynomfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig, nach Korollar III.1.9 ist die Exponentialfunktion stetig und nach Satz III.1.6 ist die Verkettung stetiger Funktionen stetig. Also ist auch $x \mapsto \exp(3x^2 - 7x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Weiter besagt Satz III.1.5 b), dass das Produkt zweier stetiger Funktionen stetig ist, also ist $x \mapsto \exp(3x^2 - 7x) \cdot (x^2 + 1)$ in jedem $x \in \mathbb{R}$ stetig.

Weiter beobachten wir, dass wegen $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und Satz II.4.7 b) $\exp(3x^2 - 7x) \cdot (x^2 + 1) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Also ist mit Hilfe des Teils (i) dieser Aufgabe und noch einmal Satz III.1.6 auch die Funktion $x \mapsto \sqrt{\exp(3x^2 - 7x) \cdot (x^2 + 1)}$ stetig.

Schließlich ist $x \mapsto x^4 + 3$ (wieder als Polynomfunktion) stetig auf $\mathbb{R}$ und außerdem wird diese Funktion nie Null. Also ist nach Satz III.1.5 c) auch $g$ stetig und wir sind fertig. $\square$

(b) *Behauptung:* Auf der Erdoberfläche gibt es immer einen Punkt, an dem die gleiche Temperatur wie an seinem Antipoden herrscht.

*Beweis:* Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0$ auf der Erdoberfläche und verbinden diesen mit seinem Antipoden durch eine auf der Erdoberfläche liegende „gerade Linie“, also durch einen Halbkreis. diesen können wir mit einem Intervall in $\mathbb{R}$ identifizieren (z.B. $[0, 1]$, oder für alle die lieber in Kilometern rechnen $[0, ca.20000]$).

Wir betrachten auf dieser Linie die Funktion

$$f(x) = T(x) - T(x_A).$$

Da $T$ stetig ist, ist auch $f$ stetig. Gilt nun zufällig $f(x_0) = 0$, so bedeutet das $T(x_0) = T(x_{0A})$ und wir haben schon den gesuchten Punkt gefunden. Ist $f(x_0) > 0$, so ist

$$f(x_{0A}) = T(x_{0A}) - T(x_{0AA}) = T(x_{0A}) - T(x_0) = -f(x_0) < 0.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz einen Punkt $\tilde{x}$ auf der Linie zwischen $x_0$ und $x_{0A}$, für den $f(\tilde{x}) = 0$ und damit $T(\tilde{x}) = T(\tilde{x}_A)$ gilt, so dass wir auch in diesem Fall einen Punkt mit der gewünschten Eigenschaft gefunden haben.

Ist schließlich $f(x_0) < 0$, so ist analog $f(x_{0A}) > 0$ und wir erhalten genauso ein $\tilde{x}$ mit $T(\tilde{x}) = T(\tilde{x}_A)$. $\square$