Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 19.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 - 3n}{5n^4 + 2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 5n}{n^3 + 4}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5}$.

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} \Big/ \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(n+1)!^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n!^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1.$$

Also folgt nach dem Quotientenkriterium, dass die Reihe absolut konvergent ist

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{n^4 - 3n}{5n^4 + 2}$ konvergiert gegen 1/5, ist also keine Nullfolge. Daher kann die Reihe nicht konvergieren.

(c) Wir setzen $b_n := \dfrac{4n^2 - 5n}{n^3 + 4}$ und schreiben b_n in der Form

$$b_n = \frac{4n^2 - 5n}{n^3 + 4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{4 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{4}{n^3}} = \frac{1}{n} \cdot y_n,$$

wobei $y_n = \dfrac{4 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{4}{n^3}}$. Damit folgt, dass (y_n) gegen 4 konvergiert. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $y_n > 3$ für alle $n \geq N$. Damit folgt, dass $b_n = \frac{1}{n} \cdot y_n > \frac{3}{n}$ für $n \geq N$. Mit dem Minorantenkriterium folgt daher, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ divergiert.

(d) Wir setzen $c_n := \dfrac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5}$ und schreiben dies in der Form

$$c_n = \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot z_n,$$

wobei $z_n = \dfrac{1 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n^4}}$. Damit folgt, dass (z_n) gegen 1/3 konvergiert. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n| < 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt also, dass $|c_n| = \frac{1}{n^2} \cdot |z_n| < \frac{1}{n^2}$ für $n \geq N$. Also folgt mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert, da sie sich durch die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ abschätzen lässt. Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

(G 2)

Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen impliziert die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(a) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(d) Die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(e) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(f) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad \left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \varepsilon\right)$.

(g) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \dfrac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(h) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(i) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Die Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $b_m := \sum_{n=1}^{m} n a_n$, ist beschränkt.

LÖSUNG: Es bezeichne C die Aussage: „Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert“. Weiter sei AC die Aussage: „$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut“. Offensichtlich gilt $AC \Rightarrow C$, aber $C \not\Rightarrow AC$. Gilt also S impliziert AC, dann gilt auch $S \Rightarrow C$ und $C \not\Rightarrow S$.

(a) $\Rightarrow AC$. Beweis: Da die Reihe $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, folgt, dass diese Folge beschränkt ist. Das heißt, es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|n^2 a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert, dass $|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt AC aus dem Majorantenkriterium. Weiter gilt $C \not\Rightarrow$ (i) nach obiger Bemerkung.

(b) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel dient zum Beispiel die harmonische Reihe.

(c) $\Leftrightarrow C$. Diese Aussage ist äquivalent zur Aussage, dass die Partialsummen eine Cauchyfolge bilden. Die Richtung „$\Leftarrow$“ folgt somit sofort. Für den Beweis „(c)$\Rightarrow$ Die Partialsummen bilden eine Cauchyfolge, sei n_0, so dass $\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Für $k, p \in \mathbb{N}$ mit $k \leq p$ erhalten wir

$$\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n = \sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n - \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n,$$

und somit

$$\left|\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| + \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit gilt natürlich (c) $\not\Rightarrow AC$.

(d) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\Rightarrow AC$. Dies folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium. Damit gilt auch $C \not\Rightarrow$ (e).

(f) $\Rightarrow AC$, Dies folgt wiederum aus dem Quotientenkriterium.

(g) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(h) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\not\Rightarrow C$. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Offensichtlich gilt $\lim a_n = 0$. Für die Partialsummen $s_m := \sum_{n=1}^m a_n$ gilt $s_m \in [0,1]$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also ist $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $s_m = 1$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ und $s_m = 0$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent.

(j) $\Rightarrow C$. Offensichtlich ist $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{j=1}^n j a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung beschränkt. Daher ist $(\sum_{j=1}^n a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Dirichlet Kriterium (Satz II.3.8) konvergent.

Allerdings impliziert (j) nicht die absolute Konvergenz. Dazu betrachten wir die Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\left| \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{1}{n} \cdot n \right| = \left| \sum_{n=1}^m (-1)^n \right| \leq 1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, also gilt (j). Aber $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert nicht absolut.

Auch folgt (j) nicht notwendigerweise aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Betrachte $a_n = \frac{1}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies liefert ein Gegenbeispiel.

(G 3)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Wir setzen $n_0 = 1$, und definieren rekursiv

$$n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : (n > n_k) \text{ und } (|x_n| > |x_{n_k}| + 1)\}.$$

Dann ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Hausübungen

(H 1)

Welche der folgenden Reihen ist konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\beta + \frac{1}{n}\right)^n$, $(\beta \in \mathbb{R})$.

LÖSUNG: (a) Es sei $a_n := \dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1.$$

Wir wählen $1 < \delta < e/2$. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} > \delta$ für $n \geq N_0$, also gilt $|a_n| \geq \delta^n$ für $n \geq N_0$. Insbesondere konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0, also ist die Reihe divergent.

(b) Es sei $a_n := \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da

$$a_n \geq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

ist die Reihe divergent nach dem Minorantenkriterium.

(c) Es sei $\beta \in \mathbb{R}$ und $a_n := \left(\beta + \dfrac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\beta + \frac{1}{n}\right| \to |\beta|$$

folgt absolute Konvergenz, falls $|\beta| < 1$. Nach den gleichen Argumenten wie in (a) folgt, dass die Reihe für $|\beta| > 1$ divergent ist. Für $\beta = 1$ und $\beta = -1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, also konvergiert die Reihe für $\beta = \pm 1$ nicht.

(H 2)

Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definieren wir die zugehörige *Folge arithmetischer Mittel* durch

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

LÖSUNG: (a) Es sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N$ gilt. Wähle nun $N' > N$, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq N'$. Für $n \geq N'$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|a_k - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist nicht konvergent. Aber es gilt

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daher folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(H 3)

(a) Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_j \neq -1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{1+a_j}$$

absolut konvergiert.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.

LÖSUNG: (a) Da $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, folgt $|a_j| \leq 1/2$ für j groß genug. Also

$$\left|\frac{a_j}{1+a_j}\right| \leq \frac{|a_j|}{1-\frac{1}{2}} = 2|a_j|$$

falls j groß genug ist. Daher konvergiert die Reihe absolut wegen des Majorantenkriteriums.

(b) Die Aussage ist falsch. Betrachte $a_j = 1$ für ungerade j und $a_j = 0$ für gerade j.