Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 12.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihen

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}}, \qquad \text{(ii)} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}.$$

Lösung: (a) (i) *Behauptung:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 1/(2\sqrt{n})$ konvergiert.

Beweis: Wir verwenden das Leibniz-Kriterium und setzen $a_n := 1/(2\sqrt{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Nach (G1) aus der 3. Übung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Weiterhin gilt $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$, also auch $1/\sqrt{n+1} \leq 1/\sqrt{n}$, woraus sofort die benötigte Monotonie folgt.

(ii) *Behauptung:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, divergiert.

Beweis: Notwendig für die Konvergenz der Reihe wäre, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wegen $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ trifft dies jedoch nicht zu; die Reihe divergiert mithin.

(b) (i) Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}} = \frac{5}{4^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5}{4^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}.$$

(ii) Es gilt für jedes $k \geq 2$

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1},$$

also haben wir für jedes $n \geq 2$ mit einem Indexshift

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{2}.$$

(G 2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die in (a) überall „$<$“ gilt.

LÖSUNG: (a) Wir setzen

$$\begin{array}{rclcrcl} a & := & \liminf_{n\to\infty} a_n, & & A & := & \limsup_{n\to\infty} a_n, \\ b & := & \liminf_{n\to\infty} b_n, & & B & := & \limsup_{n\to\infty} b_n. \end{array}$$

Man beachte, dass alle diese Größen auf Grund der Beschränktheit der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren. Es sei nun ein $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann zeigen wir

Behauptung: Es gibt ein $N_m \in \mathbb{N}$, so dass $a - 1/m \le a_n \le A + 1/m$ für alle $n \ge N_m$ gilt.

Beweis: Nehmen wir an, dass die Behauptung nicht gilt, so gibt es unendlich viele Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, so dass entweder $a_{n_k} < a - 1/m$ oder $a_{n_k} > A + 1/m$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. In jedem Fall ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit insbesondere beschränkt, denn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ja als beschränkt vorausgesetzt. Also hat sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt. Dieser muss dann nach Lemma 2.6 auch ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein. Außerdem ist er nach der Konstruktion der Teilfolge im ersten Fall kleiner oder gleich $a - 1/m$ und im zweiten größer oder gleich $A + 1/m$. Beides steht im Widerspruch dazu, dass a der kleinste und A der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. □

Analog erhält man, dass für ein geeignetes $\tilde{N}_m \in \mathbb{N}$

$$b - \frac{1}{m} \le b_n \le B + \frac{1}{m} \quad \text{für alle } n \ge \tilde{N}_m$$

gilt.

Für alle $n \ge \max\{N_m, \tilde{N}_m\}$ gilt damit

$$a + b - \frac{2}{m} \le a_n + b_n \le A + B + \frac{2}{m}.$$

Nun beobachten wir, dass mit den beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, womit $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ und $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ existieren.

Wählen wir nun eine Teilfolge $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die gegen $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert (das geht nach Lemma 2.6), so gilt wegen der Verträglichkeit von Konvergenz und Ordnung

$$a + b - \frac{2}{m} \le \lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Nun lassen wir in obiger Ungleichung noch m nach unendlich streben. Dann erhalten wir, wieder mit Hilfe der Vertäglichkeit von Konvergenz und Ordnung

$$a + b \le \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n).$$

Wählt man hingegen eine Teilfolge von $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die gegen den Limes superior dieser Folge konvergiert, so erhält man mit der gleichen Argumentation

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le A+B.$$

Abschließend brauchen wir nur noch, dass natürlich der Limes superior als größter Häufungspunkt der Folge größer oder gleich dem Limes inferior als kleinstem Häufungspunkt ist. Das ergibt

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = a+b \le \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) &\le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\\ &\le A+B = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,\end{aligned}$$

wie gefordert.

(b) Wir wählen

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n\in\mathbb{N} \text{ gerade,}\\ 1, & \text{falls } n\in\mathbb{N} \text{ ungerade,}\end{cases}$$

und

$$b_n := \begin{cases} 2, & \text{falls } n\in\mathbb{N} \text{ gerade,}\\ 0, & \text{falls } n\in\mathbb{N} \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &= 0\\ &< 1 = \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\\ &< 2 = \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\\ &< 3 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(G 3)

Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

$$\text{(a) } a_n := (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}, \qquad \text{(b) } b_n := \mathrm{i}^n,\ n\in\mathbb{N},$$

$$\text{(c) } c_n := 2^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

LÖSUNG: (a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Insbesondere konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Damit hat die Folge nach Lemma 2.6 genau einen Häufungspunkt, nämlich 0.

(b) Es ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, \dots)$; das legt folgende Vermutung nahe:

Behauptung: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Häufungspunkte i, -1, $-$i und 1.

Beweis: Es gilt für alle $k\in\mathbb{N}$:

$$b_{4k} = (\mathrm{i}^4)^k = 1^k = 1, \qquad b_{4k+1} = \mathrm{i}^{4k}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i}, \qquad b_{4k+2} = \mathrm{i}^2 = -1, \qquad b_{4k+3} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}.$$

Also konvergieren die Teilfolgen $(b_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1, i, -1 bzw. $-$i. Damit sind diese vier schon mal Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge keine anderen Häufungspunkte hat. Dazu beobachten wir, dass $b_n \in \{\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, -1\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Nehmen wir an, $a \notin \{\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, -1\}$ wäre ein weiterer Häufungspunkt, dann ist

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{|a-\mathrm{i}|,\ |a-(-1)|,\ |a-(-\mathrm{i})|.\ |a-1|\} > 0$$

und in der ε-Umgebung von a nicht ein Folgeglied von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten. Also kann a kein Häufungspunkt sein.

(c) *Behauptung:* Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Da jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|c_{n_k} - c_{n_\ell}| < 1$ für alle $k, \ell \geq k_0$ gilt. Wählen wir speziell $\ell = k+1$, so bekommen wir wegen $n_{k+1} \geq n_k + 1$ und $n_k \geq 1$

$$1 > |c_{n_k} - c_{n_{k+1}}| = 2^{n_{k+1}} - 2^{n_k} \geq 2^{n_k+1} - 2^{nk} = 2^{n_k}(2-1) = 2^{n_k} \geq 2,$$

was ein Widerspruch ist. □

Hausübungen

(H 1)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ und es gelte $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Unter welchen weiteren Bedingungen gilt dabei sogar „=“ anstelle von „≤“?

(a) Keine weiteren Bedingungen.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.

Beweisen Sie in (a), (b) und (c) jeweils ihre Antwort, bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

LÖSUNG: *Behauptung:* $\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Wir setzen

$$A := \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad B := \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad C := \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n).$$

Nach Lemma 2.6 können wir eine Teilfolge $(a_{n_k} \cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, die gegen C konvergiert. Das liefert uns eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nach Voraussetzung beschränkt ist. Also besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Häufungspunkt a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $a \geq 0$ und außerdem ist ob der Definition des Limes superior klar, dass $a \leq A$ gelten muss.

Wir betrachten nun die dazu passende Teilfolge $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da diese auch beschränkt ist, hat sie ebenfalls eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_{\ell_m}}})_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Häufungspunkt b von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, für den wie oben $0 \leq b \leq B$ gilt.

Wir betrachten nun wieder die Produktfolge $(a_{n_{k_{\ell_m}}} \cdot b_{n_{k_{\ell_m}}})_{m\in\mathbb{N}}$. Diese ist eine Teilfolge von $(a_{n_k} \cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, konvergiert also wie diese gegen C. Zusammengenommen gilt damit

$$C = \lim_{m\to\infty}(a_{n_{k_{\ell_m}}} \cdot b_{n_{k_{\ell_m}}}) = \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} \cdot \lim_{m\to\infty} b_{n_{k_{\ell_m}}} = a \cdot b \leq A \cdot B,$$

was zu zeigen war. □

(a) Ohne weitere Bedingungen gilt im Allgemeinen nicht Gleichheit.

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n := 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $b_n := 1 + (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 2,$$

aber es ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \cdot b_n = 1 + (-1)^{n+1} + (-1)^n + (-1)^{2n+1} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) *Behauptung:* Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt Gleichheit.

Beweis: OBdA sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n =: a.$$

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dieser Folge, die gegen $\limsup_{n\to\infty} b_n$ strebt. Betrachten wir nun die Produktfolge $(a_{n_k} \cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so ist diese als Produkt zweier konvergenter Folgen konvergent und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \cdot b_{n_k} = a \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Da wir oben schon im allgemeinen Fall die umgekehrte Ungleichung bewiesen haben, folgt damit die Behauptung. □

(c) Sind beide Folgen konvergent gilt Gleichheit nach (b), denn dann ist insbesondere auch eine der beiden konvergent.

(H 2)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.

LÖSUNG: (a) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: Sei

$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist 0 einziger Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge ist jedoch weder beschränkt noch konvergent.

(b) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Wir bezeichnen mit a den nach Voraussetzung einzigen Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen, dass die Folge gegen diesen konvergiert. Nehmen wir an, dass wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass gilt (Negation der Konvergenz gegen a):

$$\text{Zu jedem } N_0 \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } n \geq N_0 \text{ mit } |a_n - a| \geq \varepsilon_0. \tag{1}$$

Damit basteln wir folgendermaßen eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Wir nehmen $a_{n_0} = a_{N_0}$ und für $k \geq 0$ setzen wir $a_{n_{k+1}} = a_\ell$, wobei $\ell > n_k$ der Index aus (1) (mit $N_0 = n_k + 1$)ist.

Als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sofort ebenfalls beschränkt, nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie also einen Häufungspunkt b. Dieser ist definitiv verschieden von a, da die Teilfolge ja gerade so gewählt war, dass

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Nach Lemma 2.6 gibt es nun eine Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen b konvergiert. Diese ist aber natürlich auch eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst, weshalb wiederum nach Lemma 2.6 auch diese Folge b als Häufungspunkt hat, was schließlich im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass diese Folge eben nur genau einen Häufungspunkt hat. □

(c) Die Aussage ist wahr

Beweis: Aus der Konvergenz folgt mit Hilfe von Satz 1.6 sofort die Beschränktheit der Folge. Weiter zeigen wir, dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen den Grenzwert dieser Folge konvergiert, den wir mit a bezeichnen. Sei dazu eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$. Weiter gilt wegen der Eigenschaften von Teilfolgen $n_k \geq N_0$ für alle $k \geq N_0$. Also gilt

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N_0,$$

womit $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Zusammengenommen hat also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen Lemma 2.6 nur den Häufungspunkt a und damit genau einen. □

(d) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: Setze $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge beschränkt, sie weist jedoch die beiden Häufungspunkte -1 und 1 auf, ist also auch nicht konvergent.

(e) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Folgt sofort aus Aufgabenteil c).

(f) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Folgt sofort aus Aufgabenteil c).

(H 3)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-n^2}{n^2(1+n)}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^{n+1})^2}{17 \cdot 2^{3n}}.$$

(b) Berechnen Sie die Reihenwerte der folgenden beiden Reihen:

$$\text{(i)} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \right].$$

Bei der ersten Reihe sei $p \in \mathbb{N}$ fix vorgegeben und es darf am Ende eine endliche Summe stehen bleiben.

LÖSUNG: (a) (i) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-n^2)/(n^2(1+n))$ ist konvergent.

Beweis: Wir räumen zunächst etwas auf: es gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1-n^2}{n^2(1+n)}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n^2}.$$

Nun wollen wir das Leibniz-Kriterium anwenden. Dazu müssen wir zeigen, dass die Folge $a_n:=(n-1)/n^2$, $n\geq 2$, eine monotone Nullfolge ist. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1}=\frac{0-0}{1}=0$$

bleibt nur die Monotonie übrig.

Dazu beobachten wir, dass für alle $n\geq 2$ gilt

$$n(n-1)\geq 1\Longrightarrow n^2-n-1\geq 0\Longrightarrow n^3+n^2-n-1\geq n^3\Longrightarrow (n+1)(n^2-1)\geq n^3$$
$$\Longrightarrow (n+1)^2(n-1)\geq n^3\Longrightarrow \frac{n-1}{n^2}\geq\frac{n}{(n+1)^2}\Longrightarrow a_n\geq a_{n+1},$$

was genau die gesuchte Monotonie-Aussage ist. □

(ii) *Behauptung:* Die Reihe in (ii) ist divergent.

Beweis: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(3^{n+1})^2}{17\cdot 2^{3n}}=\frac{1}{17}\cdot\frac{3^{2n+2}}{8^n}=\frac{9}{17}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^n$$

Damit haben wir es mit einer geometrischen Reihe mit $|q|>1$ zu tun. Die summierte Folge ist keine Nullfolge, also kann die Reihe nicht konvergieren. □

(b) (i) Nach der dritten binomischen Formel gilt für alle $n\geq p+1$

$$\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{(n-p)(n+p)}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right).$$

Also ist für jedes $k\geq 3p+1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{k}\frac{1}{n^2-p^2}&=\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=p+1}^{k}\frac{1}{n-p}-\sum_{n=p+1}^{k}\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{k-p}\frac{1}{n}-\sum_{n=2p+1}^{k+p}\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}+\sum_{n=2p+1}^{k-p}\frac{1}{n}-\sum_{n=2p+1}^{k-p}\frac{1}{n}-\sum_{n=k-p+1}^{k+p}\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}-\sum_{n=k-p+1}^{k+p}\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Außerdem gilt für all diese k

$$0\leq\sum_{n=k-p+1}^{k+p}\frac{1}{n}\leq\sum_{n=k-p+1}^{k+p}\frac{1}{k-p+1}=\big(k+p-(k-p+1)\big)\frac{1}{k-p+1}=\frac{2p-1}{k-p+1}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Fassen wir diese beiden Überlegungen zusammen, so erhalten wir

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=p+1}^{k}\frac{1}{n^2-p^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}-\sum_{n=k-p+1}^{k+p}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes (vgl. I.1.15)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot 1^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.$$

Also ist mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$