Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 5.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}, \qquad b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$c_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}_0, \qquad d_n := \frac{(2n^2 - 3n)(n^3 + 1)}{(n+2)(n^2 + n^4)},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

LÖSUNG: a_n: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \cdot \varepsilon^2 > 1$ (vgl. Prinzip des Archimedes). Also gilt $\sqrt{n_0} \cdot \varepsilon > 1$, d.h. insbesondere $1/\sqrt{n_0} < \varepsilon$. Damit ist für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b_n: Für alle geraden $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$b_n = \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n} = \frac{2^n + 3^n}{2^n + 3^n} = 1$$

und für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir

$$b_n = \frac{2^n + (-1)^n 3^n}{(-1)^n 2^n + 3^n} = \frac{2^n - 3^n}{-2^n + 3^n} = -1.$$

Also ist $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und diese Folge ist bekanntermaßen divergent.

c_n: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit der dritten Binomischen Formel

$$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Da dieser Ausdruck offensichtlich immer positiv ist und $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ gilt, erhalten wir damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \leq c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir haben oben bereits gesehen, dass $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Damit ist auch $(1/2 \cdot 1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche und wir erhalten mit dem Sandwichsatz, angewandt auf die konstante Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge $(1/(2\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist und $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ gilt.

d_n: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nach kürzen mit n^5:

$$d_n = \frac{2n^5 - 3n^4 + 2n^2 - 3n}{n^5 + 2n^4 + n^3 + 2n^2} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}.$$

Zur Bestimmung dieses Grenzwertes verwenden wir die Rechenregeln für konvergente Folgen aus Lemma 1.8. Wir haben oben bereits gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ ist. Also ist mit Lemma 1.8 b) (angewandt auf die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die konstante Folge $(-3)_{n\in\mathbb{N}}$) auch die Folge $(-3/n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $-3 \cdot 0 = 0$. Genauso argumentiert man, dass die Folgen $(2/n^3)_{n\in\mathbb{N}}$, $(-3/n^4)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2/n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(2/n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ allesamt Nullfolgen sind.

Mit Lemma 1.8 a) gilt dann $\lim_{n\to\infty}(2 - 3/n + 2/n^3 - 3/n^4) = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + 2/n + 1/n^2 + 2/n^3) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$. Wenden wir nun noch auf die Folgen im Zähler und Nenner Lemma 1.8 c) an (man beachte, dass die Folge im Nenner nicht gegen Null konvergiert!), so bekommen wir $\lim_{n\to\infty} d_n = 2/1 = 2$.

Bemerkung: In dieser Ausführlichkeit macht man sich diese Argumentation natürlich nur einmal klar, danach schreibt man sowas folgendermaßen auf: Wegen der Rechenregeln für konvergente Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0 - 0}{1 + 0 + 0 + 0} = 2.$$

(G 2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent $\Longrightarrow$ $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

Beweis:

Annahme: $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist konvergent.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, ist nach Lemma 1.8 b) (angewandt auf diese Folge und die konstante Folge $(-1)_{n\in\mathbb{N}_0}$) auch die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent. Das bedeutet aber nach Annahme und wegen Lemma 1.8 a), dass die Folge $(a_n + b_n + (-a_n))_{n\in\mathbb{N}_0} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent sein. □

(b) Die Aussage ist *falsch*!

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n = 1/n$ und $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, denn diese Folge ist offensichtlich nicht beschränkt. Wir erhalten dann als Produktfolge $a_n \cdot b_n = 1/n \cdot n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also offensichtlich eine konvergente Folge.

(c) Die Aussage ist *falsch!*

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bekanntermaßen divergent und für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erhält man Divergenz in gleicher Weise wie für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Aber es ist

$$a_n + b_n = (-1)^n + (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^n - (-1)^n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent.

(d) Die Aussage ist *falsch!*

Gegenbeispiel: Wir setzen dieses Mal $a_n = b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, aber es ist $a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent.

(G 3)

(a) Begründen Sie für die folgenden Funktionen, ob diese jeweils injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto 3z, \qquad g : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto |x - 1|, \qquad h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto 3x.$$

(b) Es seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$, sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist die Verkettung von f und g definiert durch $g \circ f : X \to Z$ mit $g \circ f(x) := g(f(x))$, $x \in X$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

LÖSUNG: (a) Die Funktion f ist injektiv: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \neq z_2$ gegeben. Nehmen wir nun an, dass $f(z_1) = f(z_2)$ ist, so haben wir $3z_1 = 3z_2$, d.h. $z_1 = z_2$. Also muss $f(z_1) \neq f(z_2)$ gelten und wir haben die Injektivität von f bewiesen.

f ist nicht surjektiv, denn es gilt $2 \in \mathbb{Z}$, aber es gibt kein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $2 = f(z) = 3z$ ist.

Damit ist f insbesondere nicht bijektiv.

Die Funktion g ist nicht injektiv, denn es ist $0 \neq 2$, aber $g(0) = |0 - 1| = 1 = |2 - 1| = g(2)$.

Die Funktion g ist surjektiv: Sei $y \in [0, \infty)$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $g(x) = y$ ist. Tatsächlich erhält man sofort für $x = y + 1$ wegen $y + 1 > y \geq 0$:

$$g(x) = g(y + 1) = |y + 1 - 1| = |y| = y.$$

Trotzdem ist g nicht bijektiv, da g nicht injektiv ist.

Die Funktion h ist injektiv: Seien $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x \neq y$ gegeben. Nehmen wir an, dass $h(x) = h(y)$ gilt, so bekommen wir wie oben $3x = 3y$, also $x = y$. Da das aber ausgeschlossen war, muss $h(x) \neq h(y)$ gelten. Also ist h injektiv.

Außerdem ist h auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{C}$. Dann gilt auch $x := y/3 \in \mathbb{C}$ und $h(x) = 3x = 3 \cdot y/3 = y$. Also haben wir für jedes $y \in \mathbb{C}$ ein $x \in \mathbb{C}$ gefunden mit $h(x) = y$. Das ist gerade die Surjektivität.

Zusammengenommen ist also h bijektiv, da h injektiv und surjektiv ist.

(b) (i) *Behauptung:* f, g injektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injektiv.

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Dann gilt wegen der Injektivität von f auch $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nun ist auch noch g injektiv, also haben wir auch $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, was gerade $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ bedeutet. Also ist $g \circ f$ injektiv. □

(ii) *Behauptung:* $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Longrightarrow$ g injektiv.

Beweis: Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ gegeben. Dann gibt es wegen der Surjektivität von f zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Außerdem muss dabei gelten, dass $x_1 \neq x_2$ ist, denn wäre $x_1 = x_2$, so wäre auch $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Nun bringen wir die Injektivität von $g \circ f$ ins Spiel. Diese impliziert, dass $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ gelten muss, was aber nichts anderes bedeutet als

$$g(y_1) = g(f(x_1)) = g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2).$$

Also ist $g(y_1) \neq g(y_2)$ und wir sind fertig. □

Hausübungen

(H 1)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad b_n := \frac{6n^6 + 9n^5 - n^4 - 7n^3 + n^2 - 5}{2n^6 + n^4 + 3n^2 - 5}, \; n \in \mathbb{N},$$

$$c_n := (-1)^n \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right), \; n \in \mathbb{N}_0, \qquad d_n := \frac{n^n}{n!}, \; n \in \mathbb{N}.$$

LÖSUNG: a_n: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem Prinzip von Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \cdot \sqrt{\varepsilon} > 1$, d.h. es gilt $n_0^2 \cdot \varepsilon > 1$, bzw. $1/n_0^2 < \varepsilon$. Für alle geraden $n \geq n_0$ gilt nun

$$|a_n - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

und für alle ungeraden $n \geq n_0$ haben wir

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon.$$

Zusammengenommen gilt also $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b_n: Nach Kürzen des Bruchs mit n^6, erhält man mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{9}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{5}{n^6}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} - \frac{5}{n^6}} = \frac{6+0-0-0+0-0}{2+0+0+0} = \frac{6}{2} = 3.$$

c_n: Wie bei der Behandlung von c_n in (G1), erhält man für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$c_n = (-1)^n \sqrt{n+1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert. Dazu beobachten wir zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Folge konvergiert, so gilt für $c := \lim_{n\to\infty} c_n$ entweder $c = 0$, $c > 0$ oder $c < 0$.

$c = 0$ kann schon mal gar nicht sein, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach obiger Beobachtung:

$$|c_n - 0| = \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2},$$

also wird der Ausdruck insbesondere nie kleiner als z.B. 1/4.

Auch $c > 0$ kann nicht sein, denn für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|c_n - c| = \left|-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - c\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} + c \geq c + 1/2 \geq \frac{1}{2}.$$

Es kann also kein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben, so dass dieser Ausdruck für alle $n \geq n_0$ kleiner als 1/4 wird, denn es gibt beliebig große ungerade Zahlen.

Nimmt man schließlich $c < 0$ an, so erhält man genauso für alle geraden $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n - c| = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - c \geq \frac{1}{2} - c \geq \frac{1}{2},$$

was wieder zu einem Widerspruch führt.

Also muss die Folge divergent sein.

d_n: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{n}{1} = n.$$

Nehmen wir nun an die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre beschränkt, d.h. es gäbe ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|d_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$M \geq |d_n| = d_n \geq n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$. Also kann $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent sein.

(H 2)

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Beweisen Sie weiterhin, dass die damit sinnvoll definierte Folge $(c_n)_{n\geq n_0}$ mit $c_n := a_n/b_n$, $n \geq n_0$, ebenfalls konvergiert und dass $\lim_{n\to\infty} c_n = a/b$ gilt.

(b) Laut Vorlesung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 2.$$

Erklären Sie was an der folgenden Argumentation falsch ist und begründen Sie warum man so auf ein falsches Ergebnis kommt:

Es ist $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, *also gilt* $\lim_{n\to\infty} 1 + 1/n = 1$ *und damit schließlich*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis: Da $b \neq 0$ gilt, haben wir $|b| > 0$ und damit auch $|b|/2 > 0$. Nun konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen b, also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq |b - b_n| < |b|/2$ für alle $n \geq n_0$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt $|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|$ und damit $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für all diese n insbesondere $b_n \neq 0$.

Behauptung: $(c_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} c_n = a/b$.

Beweis: Wir zeigen nur, dass die Folge $(1/b_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$, denn dann folgt die Aussage aus der Rechenregel für Produkte von konvergenten Folgen angewandt auf $(a_n)_{n\geq n_0}$ und $(1/b_n)_{n\geq n_0}$.

Zur Behandlung der Folge $(1/b_n)_{n\geq n_0}$ beobachten wir zunächst, dass wir in obigem Beweis sogar $|b_n| \geq |b|/2$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt haben, also gilt für all diese n auch $1/|b_n| \leq 2/|b|$ (man beachte, dass $|b| > 0$ ist!).

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt auch $\varepsilon \cdot |b|^2/2 > 0$, also existiert dank der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}$$

für alle $n \geq n_1$. Setzen wir $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$, so gilt damit für alle $n \geq n_2$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| = |b_n - b|\frac{1}{|b|}\frac{1}{|b_n|} \leq |b_n - b|\frac{2}{|b|^2} < \varepsilon,$$

woraus $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$ und damit die Behauptung folgt. □

(b) Das falsche Gleichheitszeichen ist das erste in der abgesetzten Formel, also $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n$. Lax gesprochen, werden hier einige n zu schnelleren erklärt als andere, indem zuerst das n in der Klammer nach unendlich gejagt wird, während das im Exponenten „noch warten muss“ und erst danach hinterherlaufen darf. Das ist ein ganz und gar unzulässiges Vorgehen. Warum? Was passiert im gesamten Ausdruck, wenn das n groß wird? Der Inhalt der Klammer geht gegen 1, das n in der Klammer macht den Gesamtausdruck also immer kleiner, je größer es wird. In Opposition dazu arbeitet das n im Exponenten. Dieses macht den Gesamtausdruck immer größer, wenn es selbst wächst, da der Ausdruck in der Klammer immer größer als 1 ist. Der resultierende Grenzwert e ergibt sich als „Kompromiss“ zwischen diesen gegenläufigen Tendenzen. Lässt man nun ein n zuerst laufen und jagt das andere hinterher, zerstört man diesen „Wettbewerb“ zugunsten eines der Beteiligten.

Etwas mathematisch-formalistischer kann man das so ausdrücken: Im gegebenen „Beweis“ wird nicht $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ bestimmt sondern der Ausdruck

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n.$$

Dieser ist mit der gegebenen Begründung tatsächlich 1, denn nun darf das eine n (das jetzt k heißt) ganz offiziell zuerst nach unendlich gehen. Dieser doppelte Grenzwert war aber nicht zu bestimmen und ist eben, wie man hier sieht, verschieden von dem untersuchten. Gleiches gilt übrigens für den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n,$$

bei dem zunächst das k festgehalten wird und das n zuerst nach unendlich geht. Dieser existiert gleich gar nicht, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $1 + 1/k > 1$, also ist schon die Folge $((1 + 1/k)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt und damit nicht konvergent.

Fazit: Immer daran denken: Alle n sind gleichberechtigt!

(H 3) (Arithmetisches und Geometrisches Mittel)

Es seien zwei Zahlen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b_0$ gegeben. Damit definieren wir rekursiv die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie:

(a) $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend.

(c) Beide Folgen sind konvergent.

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Wir machen eine Induktion nach n. Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist durch die Voraussetzung $0 < a_0 < b_0$ abgedeckt, so dass wir uns dem Induktionsschritt zuwenden können. Wir setzen also als Induktionsvoraussetzung voraus, dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung schon einmal

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \frac{0+0}{2} = 0.$$

Weiter können wir wegen $b_n \geq a_n \geq 0$ aus b_n und a_n jeweils die Wurzel ziehen und es gilt natürlich $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$. Damit gilt

$$a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n \geq 0 \implies a_n + b_n \geq 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \implies b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot b_n} = a_{n+1}$$

wie gewünscht. □

(b) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt wegen (a)

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

□

Behauptung: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt wegen (a)

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

□

(c) *Behauptung:* Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind konvergent.

Beweis: Nehmen wir die Erkenntnisse aus (a) und (b) zusammen, so haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0.$$

Also sind beide Folgen durch b_0 beschränkt. Da sie außerdem nach (b) jeweils monoton sind, konvergieren beide nach Satz 1.13. □

(d) *Behauptung:* Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$ und wir erhalten

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{a+b}{2},$$

woraus $b/2 = a/2$ und so schließlich $a = b$ folgt. □