Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 29.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Berechnen Sie $(12+5i)(2+3i)$ und $\overline{z}$, $\mathrm{Re} z$, $\mathrm{Im} z$, $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}$ und $\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}$ von $z := \dfrac{12+5i}{2+3i}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\left|\frac{1+it}{1-it}\right| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die folgenden Punktmengen.

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 1\}, \qquad M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le |z+1|\}$$

LÖSUNG: (a) Es gilt $(12+5i)(2+3i) = 9+46i$ und

$$z = \frac{12+5i}{2+3i} = \frac{(12+5i)(2-3i)}{4+9} = \frac{1}{13}(39-26i) = 3-2i.$$

Demnach gilt $\overline{z} = 3+2i$, $\mathrm{Re} z = 3$, $\mathrm{Im} z = -2$. Da $z\overline{z} = |z|^2 = 13$ folgt $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{13} = \frac{1}{13}(3+2i)$. Also gilt $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{3}{13}$ und $\mathrm{Im}\frac{1}{z} = \frac{2}{13}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1+it}{1-it}\right| = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |1+it|^2 = |1-it|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (1+it)(1-it) = (1-it)(1+it) \end{aligned}$$

(c) Die Menge M_1 beschreibt alle Zahlen, die von 1 maximal den (komplexen) Abstand 1 haben. Dies ist also eine Kreisscheibe um 1 mit Radius 1.

Die Menge M_2 bestimmen wir durch folgende äquivalente Umformungen.

$$\begin{aligned} & |z-1| \le |z+1| \\ \Leftrightarrow \quad & (z-1)\overline{(z-1)} \le (z+1)\overline{(z+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 \le z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -2\mathrm{Re}\, z \le 2\mathrm{Re}\, z \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{Re}\, z \ge 0. \end{aligned}$$

Die Menge M_2 ist also gerade die rechte Halbebene.

(G 2)

Beweisen Sie Lemma 1.25 der Vorlesung:

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $-M := \{-m : m \in M\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) M ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow -M$ ist nach oben beschränkt.

(b) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge M besitzt ein Infimum. Dies ist eindeutig bestimmt und wird mit $\inf M$ bezeichnet.

(c) $M \neq \emptyset$ ist nach unten beschränkt $\Rightarrow \inf M = -\sup(-M)$.

LÖSUNG: (a) Es sei M nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ mit $m \geq s$ für alle $m \in M$. Damit folgt $-m \leq -s$ für alle $m \in M$, also ist $-M$ nach oben beschränkt.

Wir zeigen nun (c), die Aussagen in (b) folgen dann offensichtlich aus den Eigenschaften des Supremums.

Wir setzen $\sup -M = s_0$, dies existiert nach (a). Es sei $m \in M$, dann gilt $s_0 \geq -m$ und damit $-s_0 \leq m$, also ist $-s_0$ eine untere Schranke von M.

Es sei nun $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq -s_0$ eine untere Schranke von M. Dann gilt $s \leq m$ für $m \in M$, also auch $-s \geq -m$. Damit ist $-s$ eine obere Schranke von $-M$ und es muss nach Definition des Supremums $-s \geq s_0$ gelten. Das liefert aber wiederum $s = -s_0$ und damit ist $-s_0$ die größte untere Schranke von M.

(G 3)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(a) $A := \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} :$ Es existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$

LÖSUNG: Die Menge A ist beschränkt, denn es gilt $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{x} \leq 2 + 1/\frac{1}{2} = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Beh.: $\sup A = \frac{5}{2}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
& x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16} \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x - \frac{5}{4})^2 \leq \frac{9}{16} \\
\Leftrightarrow \quad & x - \frac{5}{4} \leq \frac{3}{4} \text{ und } x - \frac{5}{4} \geq -\frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & x \leq 2 \text{ und } x \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. Für $x = 2$ gilt $\frac{1}{x} + x = \frac{5}{2}$ und daher folgt $\max A = \frac{5}{2}$.

Weiter gilt $\inf A = \min A = 2$, denn $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$. Die letzte Aussage gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\frac{1}{2} \leq 1 \leq 2$ gilt, folgt die Behauptung.

Zur Menge B:

Mit der Substitution $u = x + 2$ und $v = 2y$ ist die Aussage $(x+2)^2 + 4y^2 < 9$ äquivalent zu $u^2 + v^2 < 3^2$. Für alle $u \in (-3, 3)$ existiert ein $v \in \mathbb{R}$ mit $u^2 + v^2 < 3^2$. Die Aussage $u \in (-3, 3)$ ist nach Definition von u äquivalent zu $-5 < x < 1$. Das heißt, zu $x \in (-5, 1)$ gibt es ein $y = 2v \in \mathbb{R}$ so dass $(x+2)^2 + 4y^2 < 9$ gilt. Damit folgt $\inf B = -5$ und $\sup B = 1$. Da diese beiden Werte nicht in B liegen, existieren $\min B$ und $\max B$ nicht.

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen:

(a) $\frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} = \frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i$ (b) $4z + \frac{52}{z} = 24$ mit $z \neq 0$ (c) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$

LÖSUNG: (a)

$$\begin{array}{rcl} & \frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} & = & \frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i \\ \Leftrightarrow & \frac{z(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(8+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} & = & \frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i \\ \Leftrightarrow & \frac{z+iz}{1+1} + \frac{15+10i}{-1-4} & = & \frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i \\ \Leftrightarrow & z + iz & = & \overline{z} \end{array}$$

Setzt man nun $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$a + ib + ia - b = a - ib.$$

Durch Zerlegung in Realanteil und Imaginäranteil erhält man $a - b = a$ und $ib + ia = -ib$. Also ist $b = a = 0$ und damit $z = 0$.

(b) Wir merken uns $z \neq 0$, multiplizieren die Gleichung mit z und lösen die entstehende quadratische Gleichung:

$$\begin{array}{rl} & 4z + \frac{52}{z} = 24, z \neq 0 \\ \Rightarrow & 4z^2 - 24z + 52 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^2 - 6z + 13 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(z^2 - 6z + (-3)^2\right) = -13 + 9 = -4 \\ \Leftrightarrow & (z-3)^2 = -4 \\ \Rightarrow & z - 3 = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i \\ \Rightarrow & z_0 = 3 + 2i, \quad z_1 = 3 - 2i \end{array}$$

(c) Wir lösen die quadratische Gleichung mit quadratischer Ergänzung:

$$\left(z - \frac{3+5i}{2}\right)^2 = 16 - 4i + \left(\frac{3+5i}{2}\right)^2 = 16 - 4i + \frac{1}{4}(9 + 30i - 25) = 12 + \frac{7}{2}i$$

Wir suchen die beiden Quadratwurzeln $\pm(x + iy)$ der rechten Seite $12 + \frac{7}{2}i$. Einerseits gilt

$$12 + \frac{7}{2}i = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 12,$$

andererseits wissen wir über den Betrag

$$x^2 + y^2 = |x+iy|^2 = \left|(x+iy)^2\right| = \left|12 + \frac{7}{2}i\right| = \sqrt{144 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion

$$x^2 = \left(12 + \frac{25}{2}\right)/2 = \frac{49}{4} \quad \text{und} \quad y^2 = \left(\frac{25}{2} - 12\right)/2 = \frac{1}{4},$$

und damit die Quadratwurzeln $\pm\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ von $12 + \frac{7}{2}i$, wie man leicht nachrechnet. Insgesamt bekommen wir die beiden folgenden Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & \frac{3+5i}{2} + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 5 + 3i \\ z_1 & = & \frac{3+5i}{2} - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2 + 2i \end{array}$$

(H 2)

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, beschränkte Mengen. Beweisen Sie:

(a) $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\} = \sup A - \inf B$,

LÖSUNG: Wir benutzen die Charakterisierung des Supremums.

(a) Es sei $\sup A = a$ und $\sup B = b$. Dann gibt es für $x \in \{a + b : a \in A, b \in B\} =: A + B$ Zahlen $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ mit $x = x_1 + x_2$. Also gilt $x \leq a + b$.

Es sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es Zahlen $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ mit $x_1 > a - \frac{\varepsilon}{2}$ und $x_2 > b - \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt $x = x_1 + x_2 > a + b - \varepsilon$ und das liefert mit dem oben gezeigten $\sup A + B = \sup A + \sup B$.

(b) Wir gehen analog zu (a) vor und setzen $\sup A = a$, $\inf B = b$. Dann gilt für $x \in A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ mit $x = x_1 - x_2$, wobei $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$, dass $x \leq a - b$. (Wegen $x_2 \geq b$.) Damit folgt $\sup A - B \leq \sup A - \inf B$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ mit $x_1 > a - \frac{\varepsilon}{2}$ und $x_2 < b + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt $x_1 - x_2 > a - \frac{\varepsilon}{2} - (b + \frac{\varepsilon}{2}) = a - b - \varepsilon$. Dies liefert die Behauptung.

(H 3)

Es sei $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ eine (endliche oder unendliche) Familie von nichtleeren Mengen $M_\alpha \subset \mathbb{R}$ und $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ deren Vereinigung. Ferner sei $m_\alpha = \sup M_\alpha$. Zeigen Sie, dass $\sup M = \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ gilt.

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass M nach oben beschränkt ist. Andernfalls existiert das Supremum nicht. Es sei $x \in M$. Das heißt, es gibt ein $\alpha \in A$ mit $x \in M_\alpha$. Damit folgt $x \leq m_\alpha \leq \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$. Also ist $\sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ eine obere Schranke von M.

Es sei nun $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\alpha_0 \in A$, so dass $m_{\alpha_0} > \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\} - \frac{\varepsilon}{2}$. Weiter gibt es ein $x \in M_{\alpha_0}$ mit $x > m_{\alpha_0} - \frac{\varepsilon}{2} > \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\} - \varepsilon$. Damit folgt $\sup M \geq \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ und die Gleichheit $\sup M = \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ ist bewiesen.