

1. Übungsblatt Analysis I

(H2) (a) Beh: $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar
für jedes $n \in \mathbb{N}$: $(A(n))$

Bew: mit vollst. Induktion

$$n=1: 5^1 - 1 = 4 \Rightarrow A(1) \text{ ist wahr.}$$

Induktionsschritt: " $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ "

Es gilt

$$5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 5 + 4 = 5 \cdot (5^n - 1) + 4$$

$$\stackrel{A(n)}{=} 5 \cdot k \cdot 4 + 4 = (5 \cdot k + 1) \cdot 4$$

(Da $5^n - 1$ durch 4 teilbar ist, gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $5^n - 1 = k \cdot 4$)

b) $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar

$$n=1: 3^2 - 1 = 8 = 2^3 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\text{Es gilt } 3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1$$

$$= (3^{2^n} + 1)(3^{2^n} - 1)$$

$$= k_1 \cdot 2 \cdot k_2 \cdot 2^{n+2}$$

$$= k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{n+3}$$

Damit ist $A(n+1)$ wahr, falls $A(n)$ wahr ist und die Beh folgt mit vollständiger Induktion.