1. Übung Analysis I

(H 1)

a) Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

da $0 \leq (x+y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$\Rightarrow \quad 2xy \leq x^2 + y^2$.

Also folgt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b) Wir setzen $x_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}$ und

$$y_k = \frac{b_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}}.$$

Mit a) gilt dann, da

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2,$$

dass

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq 1, \text{ d. h. } \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot b_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}} \leq 1$$

oder $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ □