OWO - Hausübung

Wir gehen vor wie in der Gruppenübung und erhalten

$K_1 = 4$, $K_2 = K_1 + 4 \cdot 4, \ldots, K_n = K_{n-1} + 4 \cdot 4$

Das bedeutet aber, dass $K_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Für den Umfang gilt:

$U_1 = 2 + \frac{1}{2}$; $U_2 = U_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8}$

$\ldots \quad U_{n+1} = U_n + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = U_n + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Also für $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{5}{2} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) \right)$$

und daher:

$$U_n = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} + 5 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right).$$

Der Umfang bleibt also für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ($U_n \to \frac{15}{2}$ $(n \to \infty)$).

Für den Flächeninhalt ergibt sich:

$F_1 = \frac{1}{4}$, $F_2 = F_1 + 4 \cdot \frac{F_1}{4}$, $F_3 = F_2 + 4 \cdot \frac{F_1}{4^2}$

$\ldots \quad F_{n+1} = F_n + F_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$

also $F_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right)$

daher folgt $F_n \to \frac{7}{12}$.