Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 30.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

14. Tutorium mit Lösungshinweisen

Wir wollen uns in diesem Tutorium mit den Begriffen „abzählbar“ und „überabzählbar“ beschäftigen. Zur Erinnerung: Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gibt, die surjektiv ist, d.h. es gilt $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sie ist *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

(T 1)

Es sei A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$ nicht leer. Zeigen Sie, dass dann auch B abzählbar ist.

Lösung: Da A abzählbar ist, gibt es eine Folge in A, so dass $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ gilt. Wir wählen nun ein beliebiges $b \in B$ fest aus (B ist nicht leer!). Damit definieren wir eine Folge

$$b_n = \begin{cases} b, & \text{falls } a_n \notin B, \\ a_n, & \text{falls } a_n \in B, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $x \in B$. Dann gilt nach Voraussetzung $x \in A$, also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, für das $x = a_m$ ist. Da damit $a_m \in B$ ist, haben wir $b_m = a_m = x$ (so war $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert), also ist $x \in \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. Damit haben wir $B \subseteq \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ gezeigt. Da aber auch offensichtlich $B \supseteq \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ gilt, ist damit $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

(T 2)

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Schritte:

(a) Begründen Sie warum es ausreicht, zu zeigen, dass die Menge aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist.

(b) Finden Sie eine Methode, wie man alle Brüche p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$ in einem quadratischen Raster: $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$ anordnen kann.

(c) Beweisen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Lösung: (a) Wir gehen davon aus, dass wir bereits gezeigt haben, dass die Menge $\mathbb{Q}_+$ aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist, d.h. wir finden eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\mathbb{Q}_+ = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ gilt. Mit Hilfe dieser Folgen setzen wir $b_1 = 0$, $b_{2n} = a_n$, $b_{2n+1} = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ und wir haben die Abzählbarkeit von ganz $\mathbb{Q}$ erreicht.

(b)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & 5 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \cdots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

(c) Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Setzt man nun $b_1 = 0,\ b_{2n} = a_n,\ b_{2n+1} = -a_n,\ n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

Nachfolgend präsentieren wir einen Beweis der Aussage:

Die Menge X aller Folgen mit Werten in $\{0,1\}$ ist überabzählbar.

Beweis: Wir nehmen an X wäre abzählbar unendlich, d.h. $X = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, wobei $f_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots)$ und $a_{jk} \in \{0,1\}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$.
Wir definieren nun eine Folge in $\{0,1\}$ wie folgt:

$$a_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{jj} = 0, \\ 0, & \text{falls } a_{jj} = 1 \end{cases}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in X, also gibt es nach Annahme ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} = f_{m_0}$ gilt. Das heißt aber, dass $a_{m_0} = a_{m_0 m_0}$ ist, ein Widerspruch, denn wir haben die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gerade so konstruiert, dass dies nicht gilt. □

Bemerkung: Das hier verwendete Beweisverfahren heißt *Cantorsches Diagonalverfahren*.

(T 3)

Verwenden Sie das Cantorsche Diagonalverfahren, um zu zeigen, dass das Intervall $[0,1)$ (und damit auch ganz $\mathbb{R}$) überabzählbar ist.

Lösung: Wir nehmen an, es gelte $[0,1) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann können wir jedes a_n in seiner Dezimaldarstellung schreiben. Demnach ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 0, z_1^{(n)}\, z_2^{(n)}\, z_3^{(n)} \dots \quad \text{mit} \quad z_k^{(n)} \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch

$$z_k := \begin{cases} 1, \text{ falls } z_k^{(k)} \in \{0, 2, 3, 4, \dots, 9\}, \\ 0, \text{ falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

und setzen $a := \sum_{k=1}^{\infty} z_k/10^k$. Dann ist $a \in [0,1)$, denn es gilt sogar

$$0 \le a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}.$$

Nach unserer Annahme muss nun also ein Folgenglied a_k mit $a = a_k$ und damit ein Index $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $z_j^{(k)} = z_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist aber insbesondere $z_k^{(k)} = z_k$ und das ist ein Widerspruch zu unserer Wahl von z_k. □