Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 23.01.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

13. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, gleichmäßig stetiger Funktionen, die auf M gleichmäßig gegen $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

LÖSUNG: Es sei $\varepsilon > 0$. Da f_n gleichmäßig stetig ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta_n > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| \leq \delta_n$.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_0$.

Für jedes $n > n_0$ gilt also mit der Wahl $\delta = \delta_{n_0}$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| \leq \delta$.

Damit folgt, dass f gleichmäßig stetig ist.

(T 2)

Beweisen Sie den Satz von Dini:

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, stetiger Funktionen, die auf der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ punktweise und monoton gegen eine stetige Grenzfunktion $f : K \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig auf K gegen f.

LÖSUNG: O.B.d.A sei f_n monoton wachsend, d.h. $f_n(x)$ ist monoton wachsend für jedes $x \in K$. Weiter sei $\varepsilon > 0$. Zu $x_0 \in K$ existiert nach Voraussetzung ein $n_0(x_0) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0(x_0)$.

Da f und f_n stetig sind, ist auch $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x) := |f_n(x) - f(x)|$ eine stetige Funktion. Damit folgt, dass es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in U(x_0) \cap K$ gilt. Wegen der Monotonie der Folge $f_n(x)$ gilt sogar

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0(x_0)$ und alle $x \in U(x_0) \cap K$. Das Mengensystem $\{U(x_0) : x_0 \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, genügen endlich viele der Umgebungen, um K zu überdecken. Das heißt, es existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^m U(x_i)$.

Wir setzen $N_0 := \max\{n_0(x_i) : i = 1, \ldots, m\}$. Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $x \in U(x_i)$. Damit gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_0$.

Dies heißt aber nichts anderes, als dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ und $x \in K$. Damit konvergiert f_n gleichmäßig gegen f.