Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 16.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

12. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, bestimmen Sie $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Taylorreihe von g im Nullpunkt. Gilt $\lim_{n\to\infty}(R_n g)(x, 0) = 0$ in einer Umgebung von 0?

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle globalen und lokalen Extrema von g, berechnen Sie weiter

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

und fertigen Sie damit eine Skizze des Graphen von g an.

Lösung: (a) *Behauptung:* g ist beliebig oft differenzierbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom P_n mit

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweis: (per Induktion)

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $P_n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte die Behauptung.

Induktionsschritt: Es gilt für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = \big(g^{(n)}\big)'(x) &= \frac{P_n'(x) \cdot x^{3n} - P_n(x) \cdot 3nx^{3n-1}}{x^{6n}} \mathrm{e}^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}} \mathrm{e}^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung für $P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)$, was wieder ein Polynom ist.

Es bleibt die Differenzierbarkeit in Null zu untersuchen. Hier gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{g^{(n)}(h) - g^{(n)}(0)}{h} = \frac{\frac{P_n(h)}{h^{3n}} \mathrm{e}^{-1/h^2}}{h} = P_n(h) \frac{\mathrm{e}^{-1/h^2}}{h^{3n+1}}.$$

Nun haben wir mit $t = 1/h$ und Satz III.4.6 d)

$$\lim_{h\to0} \frac{\mathrm{e}^{-1/h^2}}{h^{3n+1}} = \lim_{t\to\infty} t^{3n+1} \mathrm{e}^{-t^2} = 0.$$

Also ist dank der Stetigkeit von P_n in 0

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g^{(n)}(h) - g^{(n)}(0)}{h} = P_n(0) \cdot 0 = 0$$

und damit ist g auch $(n+1)$-mal differenzierbar in Null mit dem behaupteten Wert. $\square$

Die Taylorreihe von g um Null ist damit

$$(Tg)(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{k!} x^k = 0.$$

Da aber $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ gilt, wird g in keiner Umgebung von Null durch diese Taylorreihe dargestellt.

(b) *Nullstellen:* Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ positiv ist, gilt $g(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Damit ist Null die einzige Nullstelle von g.

Extrema: Wie schon bei den Nullstellen festgestellt, ist $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist Null ein globales Minimum von g und damit natürlich auch ein lokales. Weitere lokale Minima kann es nicht geben, denn für alle $x \neq 0$ gilt

$$g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3}$$

und diese Funktion hat keine Nullstelle in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Auch ein globales Maximum gibt es nicht, denn wegen

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \lim_{t\to 0} \mathrm{e}^t = 1$$

gibt es Funktionswerte von g, die beliebig nahe an Eins liegen, aber es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1$. Für ein solches x würde nämlich $1/x^2 = 0$ gelten, was zum Widerspruch $1 = 0$ führt.

Die gesuchten Grenzwerte haben wir oben schon berechnet.

(T 2)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion f und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist auch die Funktionenfolge $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion ist $\varphi \circ f$.

LÖSUNG: *Behauptung:* Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent gegen f und φ gleichmäßig stetig, so ist $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent gegen $\varphi \circ f$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der gleichmäßigen Stetigkeit von φ ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R} \text{ mit } |y - z| < \delta$$

ist. Da weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D$$

gilt. Damit gilt für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$

$$|(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| = |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| < \varepsilon,$$

womit wir gezeigt haben, dass $\varphi \circ f_n$ gleichmäßig auf D gegen $\varphi \circ f$ konvergiert. $\square$

(T 3)

Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\mathrm{e} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$$

und berechnen Sie damit

$$\lim_{n\to\infty} \big(n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}]\big),$$

wobei $[\cdot]$ wieder die Gaußklammer bezeichnet.

Lösung: Die Exponentialfunktion exp ist beliebig oft differenzierbar, also gibt es nach dem Satz von Taylor für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in [0,1]$ ein $\xi \in (0,x)$ mit

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= (T_n \exp)(x,0) + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.\end{aligned}$$

Mit $x = 1$ gilt also insbesondere für ein $\xi \in (0,1)$

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \big(n!\,\mathrm{e} - [n!\,e]\big) = 0$.

Beweis: Wir beobachten zunächst, dass die Eigenschaft der Gaußklammer $[x] \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ insbesondere

$$0 \leq n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

impliziert. Weiter gilt mit der oben gezeigten Abschätzung

$$n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}] \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + n! \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} - [n!\,\mathrm{e}] = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{n+1} - [n!\,\mathrm{e}].$$

Um den Term $[n!\,\mathrm{e}]$ zu behandeln, schätzen wir mit der Exponentialreihe

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ab, da alle Summanden positiv sind. Nun nutzen wir, dass die Gaußklammer eine monoton wachsende Funktion ist, womit $[n!e] \geq [n! \sum_{k=0}^{n} 1/k!]$ gilt. Das liefert zusammen mit der obigen Rechnung

$$n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \left[n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\right].$$

Das schöne an dieser Darstellung ist nun, dass die natürliche Zahl $k!$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ ein Teiler der natürlichen Zahl $n!$ ist. D.h. $n!/k!$ ist für alle diese k eine natürliche Zahl, was uns

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N} \quad \text{d.h.} \quad \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

liefert. Das ergibt

$$0 \leq n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

und da $\mathrm{e}/(n+1)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, liefert uns der Sandwichsatz die Behauptung.
$\square$