Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 09.01.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

11. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade (bzw. ungerade)*, falls $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist f differenzierbar und gerade, so ist f' ungerade.

(b) Ist f differenzierbar und ungerade, so ist f' gerade.

LÖSUNG: (a). Es sei f differenzierbar und gerade. Wir setzen $g(x) := f(-x)$. Da f gerade ist gilt daher $g(x) = f(x)$ also auch $g'(x) = f'(x)$. Andererseits folgt nach der Kettenregel $g'(x) = -f'(-x)$. Also ist $f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$ und damit ist f' ungerade.

(b). Analog setzen wir $g(x) := f(-x)$. Dann gilt $g(x) = -f(x)$ und daher $-f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$, also $f'(x) = f'(-x)$, was die Behauptung liefert.

(T 2)

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $|f(x)| \le x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Funktion f im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$.

(b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die im Punkt $x = 0$ differenzierbar und in jedem anderen Punkt unstetig ist.

LÖSUNG: (a). Aus $|f(x)| \le x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt sofort $|f(0)| \le 0$ also $f(0) = 0$. Damit folgt

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \le |x| \quad \to 0 \quad (x \to 0).$$

Die Funktion f ist daher im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$.

(b). Als Beispiel verwenden wir eine Abwandlung der Dirichletschen Sprungfunktion. Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die Funktion f ist nach Aufgabenteil (a) differenzierbar in 0. Die Unstetigkeit von f in jedem Punkt $x \neq 0$ folgt analog zu Aufgabe (G2) auf Übungsblatt 6.

(T 3)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b) = 0$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Beweisen Sie, dass es eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = f(\xi)$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$

LÖSUNG: Es sei $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}$. Dann ist g auf $[a, b]$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Außerdem ist nach Voraussetzung $g(a) = f(a)\mathrm{e}^{-a} = 0 = f(b)\mathrm{e}^{-b} = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, d.h. nach Produnktregel $f'(\xi)\mathrm{e}^{-\xi} - f(\xi)\mathrm{e}^{-\xi} = 0$. Daraus folgt $f'(\xi) = f(\xi)$.