Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 19.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

10. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x \sin x\,(x-2)^5}{e^{2x}}$,

(b) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x, \quad \alpha > 0.$

LÖSUNG: (a) Wir verwenden $e^{2x} = e^x e^x$ und erhalten so

$$\left|\frac{e^x \sin x\,(x-2)^5}{e^{2x}}\right| = \left|\frac{\sin x\,(x-2)^5}{e^x}\right| \leq \frac{|(x-2)^5|}{e^x} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

mit Hilfe von Theorem III.4.6 (d). Also ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x \sin x\,(x-2)^5}{e^{2x}} = 0.$$

(b) Es gilt $x^\alpha \log x = \log x \cdot e^{\alpha \log x}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,\infty)$, die gegen Null konvergiert. Wir wollen nun zeigen, dass dann $(\log x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert. Dazu nehmen wir an, dies gelte nicht. Dann gibt es ein $a\in\mathbb{R}$, so dass für jedes $N_0\in\mathbb{N}$ ein $m\geq N_0$ existiert mit $\log x_m > a$. Sei nun $N_0\in\mathbb{N}$ so gewählt, dass $x_m < e^a$ für alle $m\geq N_0$ gilt. Sei weiter $m_0 \geq N_0$ so groß, dass $\log x_{m_0} > a$ ist. Dann haben wir wegen

$$x_{m_0} = e^{\log x_{m_0}} > e^a$$

einen Widerspruch. Also gilt $\log x_n \to -\infty$ für $n\to\infty$.

Setzen wir nun $y_n := \log x_n$, so erhalten wir $x_n^\alpha \log x_n = \log x_n \cdot e^{\alpha \log x_n} = y_n \cdot e^{\alpha y_n}$ und mit $z = -\alpha y$ ist schließlich

$$\lim_{n\to\infty} y_n \cdot e^{\alpha y_n} = \lim_{y\to-\infty} y \cdot e^{\alpha y} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{-\alpha}\cdot\frac{1}{e^z} = 0,$$

dank Theorem III.4.6 (d).

Also gilt $x_n^\alpha \log x_n \to 0$ für $n\to\infty$ und da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge war, haben wir

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0.$$

(T 2)

Es seien X, Y zwei nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *topologisch* oder *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind.

Zeigen Sie, dass aus X kompakt und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig schon folgt, dass f topologisch ist.

Lösung: *Behauptung*: Ist X kompakt und f bijektiv und stetig, so ist f topologisch.

Beweis: Zum Nachweis, dass f topologisch ist, fehlt uns nur noch die Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1}. Wir gehen über die Definition der Stetigkeit vor. Sei also $y \in Y$ beliebig und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die gegen y konvergiert. Da f bijektiv ist, gibt es nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges Element $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$. Dank der Kompaktheit von X muss die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß mindestens einen Häufungspunkt haben. Tatsächlich hat sie sogar genau einen Häufungspunkt. Um das einzusehen, nehmen wir an, sie hätte zwei verschiedene Häufungspunkte w_1 und w_2. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k^{(1)}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen w_1 konvergiert und eine Teilfolge $(x_{n_k^{(2)}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen w_2 konvergiert. Dank der Abgeschlossenheit von X gilt dann $w_1, w_2 \in X$ und die Stetigkeit von f liefert uns

$$\begin{aligned} f(w_1) &= f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k^{(1)}}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k^{(1)}} = \lim_{n\to\infty} y_n = y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k^{(2)}} \\ &= \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k^{(2)}}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}}) = f(w_2). \end{aligned}$$

Nun ist aber f injektiv, also muss $w_1 = w_2$ gelten.

Wir haben gezeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt hat. Nach Aufgabe H2 b) von Übungsblatt 4 ist diese Folge damit konvergent. Nennen wir ihren Grenzwert x, so gilt wegen der Kompaktheit von X wieder $x \in X$ und die obige Rechnung zeigt, dass $f(x) = y$ ist, denn es muss ja $w_1 = w_2 = x$ gelten. Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x = f^{-1}(y).$$

Also ist f^{-1} stetig und wir sind fertig.

(T 3)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M^T = M^{-1}$ gilt, wobei M^T die transponierte Matrix von M bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. (Hierbei identifizieren wir eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mit dem Vektor $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.)

Hinweis: Betrachten Sie für alle $1 \le j \le n$ und $1 \le k \le n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} a_{\ell k}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben ist.

Lösung: Wir zeigen, dass $O(n)$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Heine-Borel. Dazu beobachten wir zunächst, dass eine $n \times n$-Matrix M genau dann in $O(n)$ liegt, wenn $M^T M = I$ gilt.

Nun definieren wir für alle $1 \le j \le n$ and $1 \le k \le n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ aus dem Hinweis durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} a_{\ell k}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$. Dann ist

$$\big(f_{jk}(M)\big)_{j,k=1}^n = M^T M,$$

also ist $M \in O(n)$, genau dann wenn $f_{jk}(M) = 1$ ist, wann immer $j = k$ ist und $f_{jk}(M) = 0$ im Falle $j \neq k$ gilt. Weiter ist zu bemerken, dass f_{jk} für jede Wahl von j und k offensichtlich eine stetige Abbildung ist. Da $\{0\}$ und $\{1\}$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind und die Funktionen f_{jk} stetig sind, können wir aus Theorem III.2.17 und Satz III.2.6 folgern, dass

$$O(n) = \bigcap_{j=1}^{n} f_{jj}^{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{1 \leq j,\, k \leq n,\, j \neq k} f_{jk}^{-1}(\{0\})$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass $O(n)$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ beschränkt ist. Sei dazu $M = (a_{jk})_{j,k=1}^{n} \in O(n)$. Dann ist der Euklidische Abstand zwischen dem Punkt $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ und dem Punkt $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben durch

$$\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2} = \sqrt{f_{11}(M) + \ldots + f_{nn}(M)} = \sqrt{n}.$$

Also ist $O(n)$ beschränkt und der Beweis beendet.