



# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## 9. Tutorium mit Lösungshinweisen

### (T 1)

Es sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1.  $f(x) = 0 \implies x = 0$ .
2.  $f(tx) = t^m f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $t > 0$ .

Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante  $C > 0$  gibt mit

$$|f(x)| \geq C|x|^m, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Hinweis:* Betrachten Sie  $f$  auf der Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  und verwenden Sie Theorem III.3.9.

*LÖSUNG:* Die Menge  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  ist abgeschlossen und beschränkt und deshalb kompakt. Da  $f$  stetig ist, ist auch  $|f| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f|(x) = |f(x)|$  als Verkettung zweier stetiger Funktionen stetig. Wegen Theorem III.3.9 wissen wir damit, dass die Funktion  $|f|$  auf der kompakten Menge  $S^{n-1}$  ihr Minimum annimmt, d.h. es gibt ein  $x_0 \in S^{n-1}$  mit

$$|f(x_0)| = \min_{x \in S^{n-1}} |f(x)| =: C.$$

Da  $x_0 \neq 0$  ist, folgt aus (1.), dass auch  $f(x_0) \neq 0$ , also gilt  $C = |f(x_0)| > 0$ .

Sei nun  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Ist  $x = 0$ , so gilt die behauptete Abschätzung trivialerweise, wir betrachten also den Fall  $x \neq 0$ . Dann gilt  $\frac{1}{|x|}x \in S^{n-1}$ , und wir erhalten

$$|f(x)| = \left| f\left(|x| \frac{1}{|x|}x\right) \right| = \left| |x|^m f\left(\frac{1}{|x|}x\right) \right| = |x|^m \left| f\left(\frac{1}{|x|}x\right) \right| \geq C|x|^m,$$

wie gewünscht.

### Ein Exkurs über $b$ -adische Entwicklungen:

*Vorbemerkung:* Für jedes  $y \in \mathbb{R}$  bezeichnen wir wieder mit  $[y]$  die Gaußklammer von  $y$ , also das eindeutige  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \leq y < n + 1$ .

Für alle folgenden Betrachtungen fixieren wir eine natürliche Zahl  $b \geq 2$  und ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq x < 1$ . Damit definieren wir  $d_1 = [bx]$ , so dass  $d_1 \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq d_1 < b$  ist, und setzen  $x_1 = d_1/b$ . Damit haben wir  $0 \leq x - x_1 < 1/b$ . Wir gehen weiter rekursiv vor: Gehen wir davon aus, dass wir bereits natürliche Zahlen  $d_1, \dots, d_k$  und reelle Zahlen  $x_1, \dots, x_k$  mit  $0 \leq x - x_k < b^{-k}$  definiert haben, so setzen wir  $d_{k+1} = [b^{k+1}(x - x_k)]$  und  $x_{k+1} = x_k + d_{k+1}b^{-k-1}$ . Auf diese Weise erhalten wir eine rekursiv definierte Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , für die  $0 \leq x - x_n < b^{-n}$  gilt. Außerdem ist jedes  $d_n$  ein Element von  $\{0, 1, \dots, b-1\}$  und  $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{b^i}$ . Ist nun  $x = x_n$  für ein gewisses  $n$ , dann folgt  $d_m = 0$  für alle  $m > n$ .

Wir schreiben symbolisch

$$x = 0.d_1d_2\dots,$$

wobei jedes  $d_j$  eine natürliche Zahl mit  $0 \leq d_j < b$  ist, und meinen damit, dass die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k = d_1b^{-1} + \dots + d_kb^{-k}$  gegen  $x$  konvergiert. Man nennt das eine Darstellung von  $x$  zur Basis  $b$ , oder auch  $b$ -adische Entwicklung von  $x$ .

Im geläufigsten Fall  $b = 10$  spricht man von einer Dezimaldarstellung, im Fall  $b = 2$  von einer Binärdarstellung und im Fall  $b = 3$  von einer Ternärdarstellung.

Mit obiger Konstruktion zeigt man, dass jedes  $x \in [0, 1)$  eine Darstellung in jeder Basis  $b \geq 2$  hat. Ist  $x = 1$ , so kann man  $d_j = b - 1$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  setzen und erhält mit der Formel für die geometrische Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{b^j} = 1$ . Weiter beobachten wir, dass es für rationale Zahlen  $x \in [0, 1)$ , die von der Form  $p/b^n$  für geeignete  $p, n \in \mathbb{N}$  sind, zwei verschiedene Darstellungen in der Basis  $b$  gibt:  $0.d_1d_2\dots d_n000\dots$  und  $0.d_1d_2\dots (d_n - 1)(b - 1)(b - 1)(b - 1)\dots$ , z.B. gibt es für  $b = 10$  und  $x = 1/2$  die beiden Darstellungen  $0.5000\dots$  und  $0.4999\dots$ . Natürlich ist uns die erste der beiden lieber und die oben angegebene Konstruktion erzeugt auch immer die ‚abbrechende‘ Version, wenn es diese Wahlmöglichkeit gibt. Wir bemerken abschließend ohne Beweis, dass die Darstellung eindeutig ist, wann immer  $x \in [0, 1]$  nicht von der Form  $p/b^n$  ist.

(Dieser Text basiert auf der Darstellung in: A. Browder, *Mathematical Analysis; An Introduction.*)

## (T 2)

Es sei  $C$  die in Aufgabe (G2) auf Übungsblatt 8 eingeführte Cantormenge.

- (a) Beweisen Sie, dass jeder Punkt in  $C$  ein Häufungspunkt von  $C$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $x \in [0, 1]$  genau dann in  $C$  liegt, wenn

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad \text{mit } a_n = 0 \text{ oder } a_n = 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, d.h. wenn in der 3-adischen Darstellung von  $x$  nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen.

- (c) Sei nun  $x \in C$  in der Summendarstellung aus (b) gegeben. Dann definieren wir die Funktion

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $\phi : C \rightarrow [0, 1]$  surjektiv, monoton und stetig ist.
- (ii) Beweisen Sie, dass  $\phi$  eine stetige Fortsetzung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  besitzt, die auf jedem offenen Intervall in  $[0, 1] \setminus C$  konstant ist.

*Bemerkung:* Diese Funktion  $f$  wird *Cantorfunktion* und manchmal auch *Teufelstreppe* genannt.

- (iii) Versuchen Sie  $f$  zu skizzieren.

**LÖSUNG:** (a) Sei  $x \in C$ . Um zu zeigen, dass  $x$  ein Häufungspunkt von  $C$  ist, konstruieren wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C$  mit  $x_n \neq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Nach der Definition der Cantormenge ist klar, dass  $x \in C_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir bezeichnen im Folgenden die  $2^n$  abgeschlossenen und disjunkten Intervalle, aus denen  $C_n$  besteht, mit  $I_{n,k}$ , für  $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ . Dann muss es also für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $k \in \{1, \dots, 2^n\}$  geben, so dass  $x \in I_{n,k}$  ist. Wir wählen dann als  $x_n$  den rechten Endpunkt von  $I_{n,k}$ , außer

wenn  $x$  gerade selbst dieser rechte Endpunkt ist. In diesem Fall sei  $x_n$  der linke Endpunkt von  $I_{n,k}$ .

Nun beobachten wir, dass jeder Endpunkt eines Intervalls  $I_{n,k}$  auch der Endpunkt eines Intervalls  $I_{n+1,k'}$  für ein geeignetes  $k' \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$  ist. Damit folgt mit Induktion, dass  $x_n \in C_m$  für alle  $m \geq n$  und damit auch für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist. Also gilt  $x_n \in C$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Außerdem gilt  $x_n \neq x$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , denn so haben wir die  $x_n$  ja gerade gewählt. Schließlich ist  $|x - x_n| \leq 3^{-n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also gilt  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $C$ .

(b) Wir zeigen zunächst, dass

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \right),$$

gilt, wobei

$$\frac{1}{3}C := \left\{ \frac{1}{3}x : x \in C \right\}$$

und

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C := \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x : x \in C \right\}$$

ist. Vorbereitend dazu beweisen wir für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n \right), \quad (1)$$

wobei  $\frac{1}{3}C_n$  analog zu oben definiert ist. Wir setzen  $C'_0 := \frac{1}{3}C_0$  und konstruieren ausgehend von  $C'_0$  eine Folge  $(C'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in der gleichen Weise wie  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  aus  $C_0$  hervorgegangen ist. Da  $C'_0$  die linke Hälfte von  $C_1$  ist, ist  $C'_n$  die linke Hälfte von  $C_{n+1}$ , also gilt

$$C_{n+1} = C'_n \cup \left( \frac{2}{3} + C'_n \right).$$

Andererseits können wir aus  $C'_0 = \frac{1}{3}C_0$  folgern, dass  $C'_n = \frac{1}{3}C_n$  gilt und erhalten so

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n \right).$$

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass tatsächlich

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \right)$$

gilt. Es ist zum einen

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{n+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3}C_n \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n \right) \right) \\ &\supseteq \bigcap_{i,j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3}C_i \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_j \right) \right) = \left( \frac{1}{3} \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i \right) \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \bigcap_{j=0}^{\infty} C_j \right) \\ &= \frac{1}{3}C \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \right). \end{aligned}$$

Zum anderen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right) &= \left(\frac{1}{3} \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \bigcap_{j=0}^{\infty} C_j\right) \\
&= \bigcap_{i,j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}C_i \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_j\right)\right) \\
&\supseteq \bigcap_{i,j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}C_{\max\{i,j\}} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{\max\{i,j\}}\right)\right) \\
&= \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right)\right) \\
&= \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{n+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = C,
\end{aligned}$$

woraus

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$$

folgt.

Im Folgenden bezeichnen wir die Menge aller  $x$  mit

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \quad a_j \in \{0, 2\},$$

als  $C''$  und wollen dementsprechend zeigen, dass  $C = C''$  gilt. Wir beobachten zunächst, dass  $C'' \subseteq [0, 1]$  ist, da mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = 1$$

gilt. Also konvergiert die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$  gegen ein  $x \in [0, 1]$ . Wir zeigen nun

$$C'' = \frac{1}{3}C'' \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C''\right).$$

Sei dazu  $x \in C''$ , d.h.  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$  mit  $a_j \in \{0, 2\}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\frac{x}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^{j+1}}$$

und damit  $\frac{x}{3} \in C''$ . Weiter haben wir

$$\frac{2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j},$$

mit  $b_1 = 2$  und  $b_j = a_{j-1}$  für alle  $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Das liefert auch  $\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \in C''$  und da jedes  $y \in \frac{1}{3}C'' \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C''\right)$  entweder von der Form  $\frac{x}{3}$  oder von der Form  $\frac{2}{3} + \frac{x}{3}$  für ein geeignetes  $x \in C''$  ist, bekommen wir schließlich

$$C'' \supseteq \frac{1}{3}C'' \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C''\right).$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion wählen wir wieder ein  $x \in C''$ . Dann ist wieder  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$  mit  $a_j \in \{0, 2\}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Ist  $a_1 = 0$ , so gilt

$$x = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^{j-1}} \in \frac{1}{3}C''$$

und für  $a_1 = 2$  haben wir

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} = \frac{2}{3} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^{j-1}} \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C''.$$

Also gilt

$$C'' = \frac{1}{3}C'' \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C'' \right).$$

Wir starten nun den eigentlichen Beweis von  $C'' \subseteq C$ . Es ist

$$C'' \subseteq [0, 1] = C_0.$$

Gehen wir davon aus, dass schon  $C'' \subseteq C_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt, so bekommen wir

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n \right) \supseteq \frac{1}{3}C'' \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C'' \right) = C'',$$

also haben wir per Induktion gezeigt, dass

$$C'' \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = C$$

gilt.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wählen wir ein  $x \in C$  und nehmen an es wäre  $x \notin C''$ . Da  $x \in [0, 1]$  ist, existiert eine ternäre Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \quad a_j \in \{0, 1, 2\}$$

und wegen der Annahme  $x \notin C''$  existiert ein Index  $i \in \mathbb{N}$  mit  $a_i = 1$ . Es sei  $i_0$  der kleinste solche Index. Wir untersuchen zunächst den Fall  $i_0 = 1$ , d.h.  $a_1 = 1$ . Dann ist  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , wobei der Fall  $x = \frac{2}{3}$  nicht auftreten kann, denn  $\frac{2}{3} \in C''$ . Mit der gleichen Begründung kann auch  $x = \frac{1}{3}$  nicht sein, denn dann ist

$$x = \frac{1}{3} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{3^j} \in C''.$$

Also muss sogar  $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  gelten. Aber dann kann  $x$  nicht in  $C_1$  sein, im Widerspruch dazu, dass sogar  $x \in C$  gelten soll.

Wir untersuchen also noch den allgemeinen Fall  $i_0 > 1$ . In diesem kann man eine Zahl  $y$  konstruieren, für die

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j} \in C \setminus C'', \quad b_j \in \{0, 1, 2\},$$

mit  $b_{i_0-1} = 1$  gilt. Haben wir ein solches  $y$ , so können wir  $i_0$  um 1 reduzieren. Wendet man dieses Argument dann  $i_0 - 1$  Mal an, so ist  $i_0 = 1$  und wir bekommen wieder einen Widerspruch wie oben. Zur Konstruktion von  $y$  beobachten wir, dass wegen

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \right),$$

entweder  $x \in \frac{1}{3}C$  oder  $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$  gelten muss, d.h. es ist entweder  $3x \in C$  oder  $3x - 2 \in C$ . Betrachten wir den Fall  $3x \in C$ . Dann gilt  $3x \notin C''$ , denn sonst wäre  $x \in C''$ . In diesem Fall können wir also  $y = 3x$  setzen und erhalten  $b_{i_0-1} = 1$ .

Im Fall  $3x - 2 \in C$  ist  $3x - 2 \notin C''$ , denn sonst wäre  $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C''$  und damit  $x \in C''$ . Beachtet man  $3x - 2 \in C_0 = [0, 1]$ , so erhält man  $x \geq \frac{2}{3}$ , womit

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$$

gilt. Setzen wir nun  $y = 3x - 2$ , so erhalten wir

$$y = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{3^{j-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+1}}{3^j} \in C \setminus C''$$

und damit wieder  $b_{i_0-1} = 1$ .

Das beendet den Beweis von

$$C \subseteq C'',$$

womit wir schließlich

$$C = C''$$

bewiesen haben, wie gewünscht.

- (c) (i) Zuerst müssen wir zeigen, dass  $\phi$  wohldefiniert ist, in dem Fall, dass eine reelle Zahl  $x \in [0, 1]$  zwei ternäre Darstellungen hat. Ist  $x \neq 1$  ein Element von  $C$  mit zwei ternären Darstellungen, dann hat für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  eine der beiden die Form

$$0.a_1a_2 \dots a_n000\dots,$$

wobei  $a_n \neq 0$  gilt, und die andere ist

$$0.a_1a_2 \dots (a_n - 1)222\dots$$

Dabei ist entweder  $a_n = 1$  oder  $a_n - 1 = 1$ , also ist nur eine der beiden von der Form

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \quad a_j \in \{0, 2\},$$

die Definition von  $\phi(x)$  ist also nicht ambivalent. Ist  $x = 1$  und

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},$$

so ist jedes  $a_j$  gleich 2. Also ist auch hier die Abbildung  $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass  $\phi$  surjektiv ist. Für jedes  $y \in [0, 1]$  gibt es wenigstens eine binäre Darstellung

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}, \quad a_j \in \{0, 1\}.$$

Setzen wir nun

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2a_j}{3^j} \in C,$$

so gilt  $\phi(x) = y$ , also ist  $\phi$  surjektiv.

Wählt man  $x', x'' \in C$  mit  $x' < x''$ , so sieht man leicht ein, dass  $x'$  and  $x''$  ternäre Darstellungen haben, die nur aus den Ziffern 0 und 2 bestehen und dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Zifferen in den ternären Darstellungen von  $x'$  und  $x''$  bis zur  $k$ -ten Stelle identisch sind, aber die  $k$ -te Ziffer in der Darstellung von  $x'$  ist 0 und in der Darstellung von  $x''$  ist 2. Damit folgt, dass  $\phi(x') \leq \phi(x'')$  gilt, und damit ist  $\phi$  monoton wachsend.

Die Stetigkeit von  $\phi$  folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , die in (ii) gezeigt wird, da jede in  $C$  konvergente Folge auch in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

(ii) Wir definieren die Cantor-Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  durch

$$f(x) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} : x \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ und } a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann gilt  $f(x) = \phi(x)$  für alle  $x \in C$ , dank der Monotonie von  $\phi$ .

Als nächstes zeigen wir die Stetigkeit von  $f$ . Sei dazu  $x_0 \in [0, 1]$  gegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall,  $x_0 \notin C$ : Dann gilt  $x_0 \neq 0$  und  $x_0 \neq 1$ , also existiert dank der Offenheit von  $C^c$  ( $C$  ist kompakt und deswegen abgeschlossen) ein  $\delta > 0$  mit  $(x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \subseteq [0, 1] \setminus C$ . Für dieses  $\delta$  gilt nun

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta) &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} : x_0 + \delta \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ und } a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} : x_0 - \delta \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ und } a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= f(x_0 - \delta). \end{aligned}$$

Also ist  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  konstant und damit in  $x_0$  stetig.

In gleicher Weise folgt, dass  $f$  auf jedem offenen Intervall in  $[0, 1] \setminus C$  konstant und damit dort auch monoton wachsend ist.

2. Fall,  $x_0 \in C$ : Dann gilt

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

für ein  $a_n \in \{0, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Es genügt nun ein  $\delta > 0$  zu finden, für das  $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$  für alle  $x \in [0, 1]$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  ist und ein weiteres  $\delta' > 0$  für das  $f(x_0) < f(x) + \varepsilon$  für alle  $x \in [0, 1]$  mit  $|x_0 - x| < \delta'$  ist. Wir behandeln nur den ersten Fall, der zweite geht dann analog. Sei  $j_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass

$$2^{-j_0+1} < \varepsilon$$

gilt und wähle  $\delta < 3^{-j_0}$ . Für alle  $y \in C$  mit  $|x_0 - y| < \delta$  gibt es nun eine Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\{0, 2\}$  mit

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n},$$

und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \right| < \delta.$$

Sei nun  $j_1$  die kleinste natürliche Zahl, für die  $a_{j_1} \neq b_{j_1}$  gilt. Dann haben wir  $|a_{j_1} - b_{j_1}| = 2$  und damit

$$3^{-j_0} > \delta > \frac{|a_{j_1} - b_{j_1}|}{3^{j_1}} - \sum_{n=j_1+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} \geq \frac{2}{3^{j_1}} - 2 \sum_{n=j_1+1}^{\infty} 3^{-n} = 3^{-j_1}.$$

Daraus folgt nun  $j_0 < j_1$  und für alle  $x$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  ist so

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} : x \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \text{ und } b_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{j_0} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=j_0+1}^{\infty} 2^{-j} \leq f(x) + 2^{-j_0} < f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $f$  stetig.

(iii)