Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 5.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

8. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Zeigen Sie anhand der Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, dass nicht jede stetige Funktion auch Lipschitzstetig ist.

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass die Wurzelfunktion Lipschitzstetig ist. Dann gibt es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt.

Als Gegenbeispiel wählen wir $y = 0$ und $x_n = \frac{1}{n^2}$. Dann gilt $|f(x_n) - f(y)| = \frac{1}{n} \leq L\frac{1}{n^2}$. Also folgt $n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch liefert. Also ist die Wurzelfunktion nicht Lipschitzstetig.

(T 2)

Bestimmen Sie den Rand, das Innere, den Abschluss und die Häufungspunkte der folgenden Mengen.

(a) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(b) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$

LÖSUNG: (a) Nach Aufgabe (G 2) auf Übungsblatt 6 gibt es zu zwei rationalen Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl x, die zwischen p und q liegt. Ebenso gibt es zu zwei irrationalen Zahlen eine rationale Zahl, die dazwischen liegt.

Randpunkte: Mit obiger Bemerkung folgt, dass der Rand von $A := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ die Menge $[0, 1]$ enthält. Ist $x \notin [0, 1]$, so gibt es eine Umgebung U_x um x mit $U_x \cap [0, 1] = \emptyset$ ($[0, 1]$ ist abgeschlossen). Also ist x kein Randpunkt von A. Also $\partial A = [0, 1]$.

Inneres: Zu $x \in A$ gibt es in jeder Umgebung von x Punkte in A^c. Damit ist das Innere von A leer. Andere Möglichkeit $A^o = A \setminus \partial A = \emptyset$.

Häufungspunkte: Die Menge der Häufungspunkte ist gegeben durch das Intervall $[0, 1]$.

Beweis: Es sei $x \in [0, 1]$ und U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subset U$. Wir wählen ein $x_0 \in A$ mit $x \neq x_0$. Dies existiert nach Übung 6. Sukzessive wählen wir nun $x_n \in A$, so dass, falls x_{n-1} bereits gewählt ist,

$$x_n \in (x - |x_{n-1} - x|, x + |x_{n-1} - x|) \cap A$$

mit $x_n \neq x$. Dies existiert wiederum nach Übung 6. Somit existieren unendlich viele Punkte in $U \cap A$.

Zu $x \notin [0, 1]$ gibt es eine Umgebung U_x, so dass $U_x \cap [0, 1] = \emptyset$. Also ist x kein Häufungspunkt.

Abschluss: Es gilt $\overline{A} = [0, 1]$, da $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ oder } x \text{ ist Häufungspunkt}\} = A \cup [0, 1]$.

(b) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$

Randpunkte: Es gilt $M := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \partial A$.

Beweis: Es seien $x \in M$ und eine Umgebung U_x von x gegeben. Ist $x = 0$ so enthält U_x ein Intervall der Form $(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Daher ist $(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}) \subset U_x$ und es gibt Punkte $y \in A \cap U_x$. Damit ist 0 ein Randpunkt von A.

Ist $x = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und U_x eine Umgebung von x, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{x}) \subset U$. Ferner gilt

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} > \frac{1}{n+1}.$$

Also gilt für

$$x_0 := \frac{1}{n} - \frac{1}{\max\{m+1, 2n(n+1)\}}$$

dass $x_0 \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ und $x_0 \in U_x$, also $x_0 \in A \cap U_x$. Weiter gilt, dass $x \in U_x$ aber $x \notin A$. Damit folgt, dass x_0 ein Randpunkt von A ist.

Es gibt keine weiteren Randpunkte: Ist $x \notin M$, dann gilt

Falls $x < 0$, so ist $(x + \frac{x}{2}, x - \frac{x}{2}) \cap A = \emptyset$.

Falls $x > 1$, so ist $(\frac{1+x}{2}, x + 1) \cap A = \emptyset$.

Falls $x \in [0, 1]$ und $x \notin M$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Damit ist $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ Umgebung von x, die das Komplement von A nicht trifft.

Also ist x mit $x \notin M$ kein Randpunkt.

Inneres: Da $A \cap \partial A = \emptyset$, ist das Innere von A gleich A.

Häufungspunkte: Die Menge der Häufungspunkte ist gegeben durch $H := [0, 1]$.

Ist $x \in (0, 1)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Wir setzen

$$x_k := x + \frac{1}{k} \left(\frac{\frac{1}{n} - x}{2} \right)$$

Dann gilt $x_k < \frac{1}{n}$ und $x_k \to x$ $(k \to \infty)$. Damit gibt es in jeder Umgebung von x unendlich viele Punkte aus A. Für $x = 0$ wählen wir $x_k = \frac{1}{k+1/2} \in A$ und für $x = 1$ wählen wir $x_k = 1 - \frac{1}{k+2} \in (\frac{1}{2}, 1) \in A$. Da das Komplement von $[0, 1]$ offen ist und $A \subset [0, 1]$ gilt, folgt, dass es außerhalb von H keine weiteren Häufungspunkte von A gibt.

Der Abschluss von A ist damit gegeben durch $\overline{A} = H$.

(T 3)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ sowohl offen, als auch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann $M = \mathbb{R}$ oder $M = \emptyset$ gilt.

LÖSUNG: Ist $M = \mathbb{R}$, oder $M = \emptyset$, so ist M offen und abgeschlossen, da $(\emptyset)^c = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^c = \emptyset$ gilt. Wir nehmen an, dass $M \neq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$ gilt. Dann existieren ein $y \notin M$ und ein $x \in M$.

1.Fall $\{x \in M : x < y\} \neq \emptyset$: Wir setzen $x_0 := \sup\{x \in M : x < y\}$. Es gilt $x_0 \in M$, denn zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in M$, so dass $x_0 \geq x_n > x_0 - \frac{1}{n}$. Damit folgt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Also ist $x_0 \in M$, da M abgeschlossen ist (Charakterisierung der Abgeschlossenheit durch Folgen). Außerdem folgt aus $x_n < y$ auch $x_0 < y$, da $x_0 \neq y$.

Da M auch offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $x_0 + \varepsilon \in M$ und, da $x_0 \neq y$, $x_0 + \varepsilon < y$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zu $x_0 = \sup\{x \in M : x < y\}$.

2.Fall $\{x \in M : x > y\} \neq \emptyset$: Wir setzen $x_0 := \inf\{x \in M : x > y\}$. Mit den gleichen Argumenten wie beim 1.Fall gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $x_0 \leq x_n < x_n + \frac{1}{n}$. Mit der Abgeschlossenheit von M folgt wieder $x_0 \in M$ und $y < x_0$. Die Offenheit von M liefert nun wieder $x_0 - \varepsilon > y$ für ein $\varepsilon > 0$ und damit einen Widerspruch.