Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 28.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

7. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0,\infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(b) Wir setzen $f(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in (0,r)$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(z)| \le M(s) \exp(|z|/s).$$

LÖSUNG:

Behauptung: $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius ∞ und für jedes $s \in (0,r)$ gibt es eine Konstante $M(s) > 0 : |f(z)| \le M(s)\exp(|z|/s)$.

Beweis: Es sei $s \in (0,r)$ gegeben. Dann gilt $1/r < 1/s$ und da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ den Konvergenzradius r hat, muss $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r < 1/s$ sein. Also gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/s$ für alle $n \ge N_0$ gilt. Für all diese n haben wir damit auch $|a_n| < 1/s^n$.

Setzen wir $M(s) := \max\{1, |a_0|, s|a_1|, s^2|a_2|, \dots, s^{N_0-1}|a_{N_0-1}|\}$, so gilt für alle $n \ge N_0$ mit dem oben erreichten

$$|a_n| = 1 \cdot |a_n| \le M(s) \cdot |a_n| < M(s)\frac{1}{s^n}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \le N_0 - 1$ haben wir

$$|a_n| = |a_n| \cdot s^n \frac{1}{s^n} \le M(s)\frac{1}{s^n}.$$

Zusammengenommen gilt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung $|a_n| \le M(s)/s^n$. Damit haben wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|a_n||z|^n}{n!} \le \frac{M(s)}{n!}\frac{|z|^n}{s^n}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{M(s)}{n!}\left(\frac{|z|}{s}\right)^n = M(s)\cdot\exp(|z|/s)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, ist damit nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, also ist der Konvergenzradius dieser Reihe ∞. Weiter erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|}{n!}|z|^n \le \sum_{n=0}^\infty \frac{M(s)}{n!}\left(\frac{|z|}{s}\right)^n = M(s)\exp(|z|/s),$$

was die gewünschte Abschätzung ist. $\square$

(T 2)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) > 0$ auch für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

LÖSUNG: *Behauptung:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $f(x_0) > 0 \Longrightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Beweis: Setze $\varepsilon := f(x_0)/2$. Da f in x_0 stetig ist, gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

gilt. Für all diese x gilt damit auch

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) \geq f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0,$$

was die Behauptung war.

(T 3)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und es gelte $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

LÖSUNG:

Behauptung: $f(0) = 1$, $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ und f in 0 stetig $\Longrightarrow f$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Dann ist auch die Folge $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n := x - x_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Da f nach Voraussetzung in 0 stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(\delta_n) = f(0) = 1$, also gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(\delta_n) > 1/2$ für alle $n \geq \mathbb{N}_0$ gilt.

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung

$$f(x_n) = f(x - \delta_n) \leq f(x) \cdot f(-\delta_n),$$

sowie

$$f(x) = f(x_n + \delta_n) \leq f(x_n) \cdot f(\delta_n).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen bekommen wir für alle $n \geq N_0$

$$\frac{f(x)}{f(\delta_n)} \leq f(x_n) \leq f(x) \cdot f(-\delta_n).$$

Nun ist $\lim_{n\to\infty} f(x)/f(\delta_n) = f(x)/1 = f(x)$ und, da auch die Folge $(-\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, auch $\lim_{n\to\infty} f(x) \cdot f(-\delta_n) = f(x) \cdot 1 = f(x)$. Nach dem Sandwichsatz gilt also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

was genau die Stetigkeit von f in x bedeutet. $\square$