Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 14.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

5. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) (Babylonisches Wurzelziehen)

Für $a \geq 1$ betrachten wir die Funktion

$$f : [1, a] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{a}$ ein Fixpunkt dieser Funktion ist und bestimmen Sie den Wert von $\sqrt{2}$ mit einer Abweichung von höchstens $3 \cdot 10^{-3}$ genau (Hierbei genügt nicht der Vergleich mit einem Taschenrechner-Ergebnis, gesucht ist ein Beweis dafür, dass der erhaltene Wert die gewünschte Genauigkeit besitzt, der ohne das Wissen um den realen Wert auskommt).

Lösung:

Behauptung: $\sqrt{a}$ ist Fixpunkt von f.

Beweis: Wir erhalten durch direktes Nachrechnen

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

$\square$

Behauptung: Es gilt $|\sqrt{2} - \frac{577}{408}| < 3 \cdot 10^{-3}$

Beweis: Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden auf die Funktion

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Dazu müssen wir zeigen, dass $f : [1, 2] \to [1, 2]$ gilt, d.h. dass $f([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ ist und dass f auf $[1, 2]$ eine strikte Kontraktion ist, d.h. dass die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [1, 2]$$

für ein $0 \leq q < 1$ gilt.

Dazu bemerken wir zunächst, dass für alle $x \in [1, 2]$ auch

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{1}\right) = 2$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1$$

gilt. Damit ist $f(x) \in [1, 2]$, also haben wir schon $f([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ erreicht.

Es bleibt zu zeigen, dass f eine strikte Kontraktion ist. Seien dazu $x, y \in [1,2]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}-y-\frac{2}{y}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|x-y+\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right| = \frac{1}{2}\left|x-y+\frac{2y-2x}{xy}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x-y)\left(1-\frac{2}{xy}\right)\right| = \frac{1}{2}|x-y|\left|1-\frac{2}{xy}\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|,\end{aligned}$$

denn wegen $xy \geq 1$ gilt $2/(xy) \leq 2$ und damit $1-2/(xy) \geq -1$ und wegen $xy \leq 4$ ist $2/(xy) \geq 1/2$ und deshalb $1-2/(xy) \leq 1-1/2 = 1/2$; zusammen gilt also $|1-2/(xy)| \leq 1$. f ist also auf $[1,2]$ eine strikte Kontraktion mit $q = 1/2$.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat nun f in $[1,2]$ genau einen Fixpunkt, und da wir schon wissen, dass $\sqrt{2} \in [1,2]$ ein Fixpunkt von f ist, muss also das dieser Fixpunkt sein. Nach Bemerkung 2.14 liefert der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes nun sogar ein Näherungsverfahren für den Fixpunkt, das wir nutzen. Als Startwert wählen wir $x_0 := 3/2$. Dann ist $x_1 = f(x_0)$, also

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}.$$

Genauso erhalten wir

$$x_2 = f(x_1) = \frac{577}{408}.$$

Nun gilt nach der a-posteriori-Schranke aus Bemerkung 2.14

$$|x_2-\sqrt{2}| \leq \frac{q}{1-q}|x_2-x_1| = 1 \cdot \left|\frac{577}{408}-\frac{17}{12}\right| = \frac{1}{408} \leq \frac{1}{400} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-2} = \frac{5}{2}10^{-3} < 3\cdot 10^{-3}.$$

□

(T 2)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie: Setzt man $b_n := \sup\{a_j : j \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, konvergent und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{j\geq n} a_j.$$

Bemerkung: Analog kann man auch die Beziehung

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} a_j$$

beweisen. Beide Formeln motivieren die Bezeichnungen lim inf und lim sup und werden auch häufig zur Definition dieser Größen verwendet.

LÖSUNG:

Behauptung: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

Beweis: Aus der Mengeninklusion

$$\{a_j : j \geq n+1\} \subseteq \{a_j : j \geq n\}$$

folgt nach Definition des Supremums sofort

$$b_{n+1} = \sup\{a_j : j \geq n+1\} \leq \sup\{a_j : j \geq n\} = b_n.$$

Weiterhin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\inf\{a_j : j \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_j : j \geq 1\} \leq \inf\{a_j : j \geq n\} \leq \sup\{a_j : j \geq n\} \leq b_n;$$

somit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, da nach Voraussetzung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. $\square$

Damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert gerade der Limes superior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Wir setzen $a := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und wählen ein $\varepsilon > 0$. Zunächst zeigen wir, dass dann ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n < a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0. \tag{1}$$

Nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, so gibt es unendlich viele Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, so dass $a_{n_k} \geq a + \varepsilon$ gilt. Dies ist eine Teilfolge der beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sie besitzt also einen Häufungspunkt, der auf Grund der Konstruktion von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in jedem Fall größer oder gleich $a+\varepsilon$ ist. Das kann aber nicht sein, da dieser natürlich auch ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre und davon ist a der größte.

Nach Lemma 2.6 können wir nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, die gegen a konvergiert (diese hat nichts mehr mit der Teilfolge im vorigen Absatz zu tun!). Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n_k \geq N_1$$

gilt. Insbesondere ist für all diese k damit $a_{n_k} > a - \varepsilon$. Sei nun $n \geq N_2 := \max\{N_0, N_1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n_k \geq n$ gilt. Dann ist insbesondere $n_k \geq N_1$, woraus folgt

$$a - \varepsilon < a_{n_k} \leq \sup\{a_j : j \geq n\} = b_n,$$

denn $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_j : j \geq n\}$. Außerdem gilt für alle $j \geq n$ nach (1) die Ungleichung $a_j < a + \varepsilon$, womit auch

$$b_n = \sup\{a_j : j \geq n\} \leq a + \varepsilon$$

gelten muss. Damit ist $-\varepsilon < b_n - a \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$, d.h.

$$|b_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2,$$

womit wir $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ gezeigt haben. $\square$

(T 3)

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=11}^{23}\sum_{j=0}^{2007}\binom{2007}{j}(-1)^{j+1}k^j \cdot 9^{2007-j} - \sum_{\ell=1}^{14}\ell^{2007}$.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_3 a_{n+3}) = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_2.$$

LÖSUNG: (a) Mit dem binomischen Lehrsatz bekommen wir zunächst

$$\sum_{j=0}^{2007}\binom{2007}{j}(-1)^{j+1}k^j \cdot 9^{2007-j} = \sum_{j=0}^{2007}\binom{2007}{j}k^j \cdot (-9)^{2007-j} = (k-9)^{2007}.$$

Damit gilt

$$\sum_{k=11}^{23}\sum_{j=0}^{2007}\binom{2007}{j}(-1)^{j+1}k^j \cdot 9^{2007-j} - \sum_{\ell=1}^{14}\ell^{2007} = \sum_{k=11}^{23}(k-9)^{2007} - \sum_{\ell=1}^{14}\ell^{2007}$$

$$= \sum_{k=2}^{14}k^{2007} - \sum_{k=1}^{14}k^{2007} = \sum_{k=2}^{14}k^{2007} - 1^{2007} - \sum_{k=2}^{14}k^{2007} = -1.$$

(b) Wir untersuchen die Folge der Partialsummen und setzen hierzu

$$S_k := \sum_{n=0}^{k} (\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_3 a_{n+3}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=0}^{k} \lambda_1 a_{n+1} + \sum_{n=0}^{k} \lambda_2 a_{n+2} + \sum_{n=0}^{k} \lambda_3 a_{n+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \sum_{n=2}^{k} \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_2 + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_2 a_{k+2} + \sum_{n=0}^{k-2} \lambda_3 a_{n+3} + \lambda_3 a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2 + \lambda_1 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + \lambda_2 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + \lambda_3 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + (\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + [(\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3}].
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung entfällt der dritte Summand, denn $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Der Term in der eckigen Klammer genügt

$$\lim_{k\to\infty} [(\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3}] = 0,$$

da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Nullfolge vorausgesetzt war. Damit erhalten wir für die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2,$$

was die Behauptung beweist.