Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

Analysis I für M, LaG/M, Ph

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) Zeigen Sie $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Sei dazu $y \in f(A \cup B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cup B$, so dass $y = f(x)$ ist. Dieses x liegt nun also in A oder in B. Gilt $x \in A$, so haben wir $y = f(x) \in f(A)$, ist $x \in B$, so gilt $y = f(x) \in f(B)$. In jedem Fall ist also $y \in f(A) \cup f(B)$.

Es bleibt $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$ zu zeigen. Ist $y \in f(A) \cup f(B)$, so gilt $y \in f(A)$ oder $y \in f(B)$. Ist $y \in f(A)$, so gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ und im Fall $y \in f(B)$ finden wir ein $x \in B$ mit $f(x) = y$. Zusammengenommen gibt es also immer ein $x \in A \cup B$ mit $f(x) = y$, was gerade $y \in f(A \cup B)$ bedeutet. □

(b) *Behauptung:* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Beweis: Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Also ist $x \in A$ und $x \in B$, woraus folgt, dass $y = f(x)$ in $f(A)$ und in $f(B)$ liegt. Das liefert schließlich $y \in f(A) \cap f(B)$. □

(c) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$, sowie $A := [-2, -1]$ und $B = [1, 2]$. Dann gilt $A \cap B = \emptyset$, aber da $f(A) = f(B) = [1, 4]$ gilt, ist $f(A) \cap f(B) = [1, 4] \neq \emptyset = f(A \cap B)$.

(T 2)

Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

(a) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$, (b) $|a_n| < 2\varepsilon^4$, (c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$,

(d) $|a_n^2 + a_n| < \varepsilon$, (e) $|a_n \cdot a_{n+m}| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

LÖSUNG: (a) *Gegenbeispiel:* Betrachte $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n + a_{n+1}| = |(-1)^n + (-1)^{n+1}| = |1 - 1| = 0,$$

die angegebene Bedingung ist also für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ schon für $N_0 = 1$ erfüllt. Trotzdem konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sicher nicht gegen Null.

(b) *Behauptung:* $(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < 2\varepsilon^4\ \forall n \geq N_0) \Longrightarrow a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Sei $\delta > 0$ beliebig und setze $\varepsilon := \sqrt[4]{\delta/2}$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - 0| = |a_n| < 2\varepsilon^4 = 2\left(\sqrt[4]{\frac{\delta}{2}}\right)^4 = \delta \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Damit haben wir die Definition der Konvergenz nachgeprüft, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also eine Nullfolge. □

(c) *Gegenbeispiel:* Wir setzen

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n \cdot a_{n+1}| = \left|1 \cdot \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

und da $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen eine Nullfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n \cdot a_{n+1}| = 1/n < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$.

Andererseits ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Um das einzusehen, nehmen wir an diese Folge würde gegen Null konvergieren. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < 1/2$ für alle $n \geq N_0$ ist. Nun gibt es aber eine gerade Zahl m, die größer als N_0 ist (z.B. muss entweder $N_0 + 1$ oder $N_0 + 2$ gerade sein). Für diese ist dann $1/2 > a_m = 1$, was ein Widerspruch ist.

(d) *Gegenbeispiel:* Wir betrachten die konstante Folge $a_n = -1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n^2 + a_n| = |(-1)^2 + (-1)| = |1 - 1| = 0,$$

so dass wie in (a) das angegebene Kriterium sogar immer mit $N_0 = 1$ erfüllt ist. Außerdem ist diese Folge natürlich keine Nullfolge, da sie gegen -1 konvergiert.

(e) *Behauptung:* $(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n \cdot a_{n+m}| < \varepsilon\ \forall n \geq N_0\ \forall m \in \mathbb{N}) \Longrightarrow a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis. Dazu nehmen wir an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist. Was heißt das nun? Wir müssen die Aussage „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen Null“ negieren. Das geht am besten in Quantorenschreibweise. Wir wollen also folgendes negieren:

$$\forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n| < \delta.$$

Das ergibt als Negation (aus jedem „∀“ wird ein „∃“ und aus jedem „∃“ ein „∀“, außerdem müssen wir die Ungleichung am Ende umkehren):

$$\exists \delta > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n| \geq \delta. \tag{1}$$

D.h. (wieder in Worten) es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > n_0$ existiert mit $|a_n| \geq \delta$.

Betrachten wir nun die Voraussetzung, so liefert uns diese zum soeben gefundenen δ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n \cdot a_{n+m}| < \delta^2 \quad \text{für alle } n \geq N_0 \text{ und alle } m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (1) (mit $n_0 = N_0$) gibt es nun ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 \geq N_0$ und $|a_{k_1}| \geq \delta$. Verwenden wir nochmals (1), dieses mal mit $n_0 = k_1 + 1$, so erhalten wir ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_2 > k_1$, für das ebenfalls $|a_{k_2}| \geq \delta$ gilt. Setzen wir $m := k_2 - k_1$, so ist $m \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$|a_{k_1} \cdot a_{k_1+m}| = |a_{k_1}||a_{k_2}| \geq \delta^2,$$

was im Widerspruch zu (2) steht. (Man beachte, dass $k_1 \geq N_0$ gewählt wurde!) □

(T 3)

(a) Beweisen Sie den *Sandwichsatz*:

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reelle Folgen. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq n_0$$

gilt, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Satzes den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}.$$

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt, so ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es dank der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

gilt. Genauso gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - a| < \varepsilon/4 \quad \text{für alle } n \geq N_2$$

ist, da auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen a konvergiert. Setzen wir nun $N := \max\{n_0, N_1, N_2\}$, so gilt für alle $n \geq N$

$$|c_n - a| = |c_n - b_n + b_n - a| \leq |c_n - b_n| + |b_n - a|.$$

Da $n \geq n_0$ ist, ist $c_n - b_n \leq 0$ und $b_n - a_n \geq 0$. Also gilt

$$|c_n - b_n| = b_n - c_n \leq b_n - a_n = |b_n - a_n|,$$

woraus zusammen mit obiger Überlegung und der Dreiecksungleichung

$$|c_n - a| \leq |b_n - a_n| + |b_n - a| \leq |b_n - a| + |a_n - a| + |b_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ folgt. □

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 + 3 \geq n^2$, also auch $\sqrt{n^2+3} \geq \sqrt{n^2} = n$, woraus schließlich

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt. Mit dem Sandwichsatz erhalten wir nun, da $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0.$$