Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 24.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

2. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) > 2^n, \qquad \text{so folgt} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1+k) \leq 2^k$, für $k \in \mathbb{N}$.

LÖSUNG: Wir führen den Beweis indirekt. D.h. wir zeigen

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq n \qquad \Rightarrow \qquad \prod_{i=1}^{m}(1+a_i) \leq 2^n.$$

Die Ungleichung $1+k \leq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt als einfache Anwendung der Bernoulli Ungleichung. Damit folgt durch Anwendung von $1+k \leq 2^k$ auf $k = a_i$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) &\leq 2^{a_1} \cdot \ldots 2^{a_m} \\ &= 2^{(\sum_{i=1}^{m} a_i)} \\ &\leq 2^n\end{aligned}$$

nach Voraussetzung $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq n$. $\square$

(T 2)

Beispiel:

Finden Sie eine Formel für die folgende Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) \quad (= 1+3+5+7+\ldots+(2n+1)).$$

Lösung: Sei $a_k = k^2$ für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Dann gilt $a_1 - a_0 = 1^2 - 0^2 = 1$, $a_2 - a_1 = 2^2 - 1^2 = 3$, $a_3 - a_2 = 3^2 - 2^2 = 5$, $a_4 - a_3 = 4^2 - 3^2 = 7$ und $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

Nach Summieren erhalten wir $1+3+5+7+\ldots+(2n+1) = a_{n+1} - a_0 = (n+1)^2$.

Finden Sie Formeln für die folgenden Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \quad (= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1));$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Hinweis: $a_k = k^3$.

LÖSUNG: Es sei $a_k = k^3$ für $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Dann gilt

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 = 3k(k+1) + 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_0 &= \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (3k(k+1) + 1) \\ &= n + 1 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k(k+1). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} = \frac{(n+1)((n+1)^2 - 1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Nach dem Beispiel gilt $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ und damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

(T 3)

Leiten Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$ aus den Axiomen her:

(a) Aus $n, m \in \mathbb{N}_0$ folgt:

$$n + m,\ m \cdot n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert **kein** $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m < n+1$.

(c) Jede nichtleere Menge M natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

LÖSUNG: (a) Beweis durch vollst. Ind.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Beh.: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $n + m \in \mathbb{N}_0$.

I.A.: $m = 0$. Dann gilt $n + 0 = n \in \mathbb{N}_0$ nach Voraussetzung.

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $n + m \in \mathbb{N}_0$.

I.S.:$(m \rightsquigarrow m+1)$ $n + m + 1 = (n+m) + 1 \in \mathbb{N}_0$, da $\mathbb{N}_0$ induktive Menge ist.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Beh.: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $nm \in \mathbb{N}_0$.

I.A.: $m = 0$. Dann gilt $n \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $nm \in \mathbb{N}_0$.

I.S.:($m \rightsquigarrow m+1$) $n(m+1) = nm + n \in \mathbb{N}_0$, nach obiger Aussage, da $nm \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Wir zeigen zuerst, dass $M := \{n \in \mathbb{N}_0 : n-1 \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ induktiv ist.

i) $0 \in M$ nach Definition.

ii) Sei $n \in M$, also insbesondere $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt $n+1 \in \mathbb{N}_0$, da $\mathbb{N}_0$ induktiv ist. Weiter gilt $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}_0$ also $n+1 \in M$.

Wir zeigen nun, dass $K := \{n \in \mathbb{N}_0 : \text{ es gibt kein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n < m < n+1\}$ induktiv ist.

i) $0 \in K$ folgt aus den Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$ aus der Vorlesung.

ii) Sei $n \in K$. Annahme: $n+1 \notin K$, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $n+1 < m < n+2$. Nach dem eben bewiesenen liegt auch $m-1 \in \mathbb{N}_0$ (Beachte, dass $0 < 1 \Rightarrow 0 < 1+n < m$ gilt) Damit ergibt sich $n < m-1 < n+1$, was aber im Widerspruch zu $n \in K$ steht. Damit folgt $K = \mathbb{N}_0$ und die Behauptung.

c) Es sei $M \subset \mathbb{N}_0$, $M \neq \emptyset$.

Annahme: M besitzt kein kleinstes Element.

Setze $K := \{n \in \mathbb{N}_0 : n < m \text{ für alle } m \in M\}$. Wir zeigen, dass K induktiv ist.

i) $0 \in K$, da 0 sonst das kleinste Element von M wäre.

ii) Es sei $n \in K$. Annahme $n+1 \notin K$, d.h. es existiert ein $m_1 \in M$ mit $m_1 \leq n+1$, da M kein kleinstes Element besitzt, existiert ein $m_2 \in M$ mit $m_2 < m_1 \leq n+1$. Damit folgt nach Voraussetzung $n < m_2 < n+1$, was im Widerspruch zu (b) steht. Somit ist K induktiv, also $K = \mathbb{N}_0$. Damit folgt aber auch, dass für $m \in M$ auch $m \in K$ gilt. Also $m < m$ nach Definition von K. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Also muss unsere Annahme falsch sein, was zur Folge hat, dass M ein kleinstes Element besitzt.