



# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## 13. Übung

### Gruppenübungen

#### (G 1)

Wir betrachten die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$ . Geben Sie ein Folge von Treppenfunktionen an, die gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen  $f$  konvergiert und bestimmen Sie damit  $\int_0^1 f(x) dx$ .

*Hinweis:* Beachten Sie das Ergebnis von Aufgabe (T2) auf dem zweiten Tutoriumsblatt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

#### (G 2)

Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion auf einem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  sprungstetig ist.

#### (G 3)

Es sei  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $F$  differenzierbar ist, aber  $F' \notin \mathcal{S}[0, 1]$  gilt.

*Bemerkung:* Dieses Beispiel zeigt, dass es Funktionen gibt, die nicht sprungstetig sind, aber eine Stammfunktion besitzen.