



Analysis I für M, LaG/M, Ph

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Wir betrachten die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Geben Sie ein Folge von Treppenfunktionen an, die gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f konvergiert und bestimmen Sie damit $\int_0^1 f(x) dx$.

Hinweis: Beachten Sie das Ergebnis von Aufgabe (T2) auf dem zweiten Tutoriumsblatt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(G 2)

Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sprungstetig ist.

(G 3)

Es sei $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, aber $F' \notin \mathcal{S}[0, 1]$ gilt.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass es Funktionen gibt, die nicht sprungstetig sind, aber eine Stammfunktion besitzen.