Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 21.01.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

12. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}, \; x \in [0,2] \quad \text{und} \quad g_n(x) = \frac{nx+2}{n|x|+1}, \; x \in [-1,1],$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen jeweils für $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(c) Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und/oder $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent?

(G 2)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}}, \qquad x \in [0,\infty)$$

gegeben.

(a) Begründen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion f an.

(b) Bestimmen Sie die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

(c) Gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in [0,\infty)$?

(G 3)

Beweisen Sie das Weierstraßsche Konvergenzkriterium aus Satz IV.4.9:

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.

Hausübungen

(H 1)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5];$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

(H 2)

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gilt.

(b) Beweisen Sie Lemma 4.13 aus der Vorlesung:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann besitzt die formale Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ.

(H 3)

Die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig?