Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2007/08 14.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $(T_j f)(x, 0)$ und $(T_j g)(x, 1)$ jeweils für $j = 0, 1, 2, 3$ und skizzieren Sie beide Funktionen jeweils mit den Taylorpolynomen zusammen in ein Schaubild.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die Restglieder $(R_3 f)(x, 0)$ für alle $x \in [0, \pi/4]$ und für $(R_3 g)(x, 1)$ im Bereich $x \in [0, 3]$ an.

(G 2)

Bestimmen Sie den Wert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} ist, durch ein geeignetes Taylor-Polynom.

(G 3)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ a, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Für welche Werte von a ist f konvex auf $[0, 1]$?

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Taylorreihe $(Tf)(x, a)$ von $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius dieser Reihe.

Bemerkung: Natürlich kennen wir über die geometrische Reihe eine Reihendarstellung dieser Funktion. Nächste Woche können wir auch beweisen, dass die Reihendarstellung einer Funktion, sofern sie existiert, eindeutig ist. Bis dahin bleibt leider nichts anderes übrig als die Taylorreihe von Hand auszurechnen.

(H 2)

Bestimmen Sie den Wert $1{,}05^{1{,}02}$ mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

(H 3)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie

(a) Hat f in einem Punkt $x_0 \in D$ ein lokales Minimum, so ist dieses das globale Minimum.

(b) Hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum, so ist f in einer Umgebung von x_0 konstant.