Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 07.01.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{\sin x}$.

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist g' in den Punkten in denen g differenzierbar ist stetig?

(G 2)

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x \in (0, \pi/2)$ gilt

(a) $x \cos x < 1$;

(b) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$. *Hinweis:* Teil (a).

(G 3)

Die Funktion f sei differenzierbar in $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Hausübungen

(H 1)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(H 2)

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(a) $|e^x \sin x - e^y \sin y| \leq e^{\frac{\pi}{2}} |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

(b) $e^a(b - a) < e^b - e^a < e^b(b - a), \qquad$ für $a < b$;

(c) $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}, \qquad$ für $x > 0$.

(H 3)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und auf $D \setminus \{x_0\}$ differenzierbar. Zeigen Sie (mit Hilfe des Mittelwertsatzes), dass f differenzierbar im Punkt x_0 ist und $f'(x_0) = a$ gilt, falls $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a$ gilt.
Gilt auch die Aussage

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ existiert nicht} \qquad \Rightarrow f \text{ ist in } x_0 \text{ nicht differenzierbar?}$$