Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 17.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

9. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Beweisen Sie, dass die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ stetig, surjektiv und streng monoton wachsend ist (und zeigen Sie damit Lemma III.4.12 b)).

(G 2)

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^{517}$ und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Skizzieren Sie die fünften Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene.

(G 3)

Zeigen Sie die beiden folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z, \qquad z \in \mathbb{C}, \\ &\text{(b)} \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, bzw. begründen Sie die Nichtexistenz.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

(H 2)

Es seien zwei Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ and $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$, falls sie existieren.

(c) Sind f und/oder g jeweils stetig in 0?

(H 3)

Es seien $z \in \mathbb{C}$ und $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Geben Sie Darstellungen für $\mathrm{Re}(\sin z)$ und $\mathrm{Im}(\sin z)$ mit Hilfe der Funktionen sin, cos, sinh und cosh an. Zeigen Sie damit, dass

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

gilt.