Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 10.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Minitest. Bearbeitungszeit nicht mehr als 5 Minuten.)

Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	offen
$(0,1) \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2] \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$				
$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{R}$				
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$				
$[1,2) \subseteq \mathbb{R}$				

(G 2)

Wir definieren eine Folge von Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$ in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} C_0 &:= [0,1], \\ C_1 &:= C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ C_2 &:= C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \\ \vdots \; &\;\vdots \;\; \vdots \end{aligned}$$

Allgemein konstruieren wir C_{n+1}, indem wir von jedem der 2^n Intervalle, aus denen C_n besteht, jeweils das offene mittlere Drittel entfernen. Dann ist die *Cantormenge* C gegeben durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie, dass C kompakt ist und dass $C^\circ = \emptyset$ gilt.

(G 3)

(a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende Implikationskette.

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \Rightarrow \; f \text{ gleichmäßig stetig} \Rightarrow \; f \text{ stetig.}$$

(b) Es sei

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(c) Es sei

$$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist (Die, die im Tutorium schon gezeigt haben, dass g nicht Lipschitz-stetig ist, können sich freuen und dafür die gleichmäßige Stetigkeit besonders schön aufschreiben).

Hausübungen

(H 1)

(a) Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r. Zeigen Sie, dass $B_r(x)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

(b) Zeigen Sie für beliebige Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen und beweisen Sie damit Bemerkung III.2.8.

(i) Es gilt $M^\circ = \displaystyle\bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O.$

(ii) $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M = \displaystyle\bigcap_{M \subseteq A,\, A \text{ abgeschlossen}} A.$

(iii) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}.$

(H 2)

Es sei $x_n := 1 - 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit definieren wir die Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (-1)^{n+1}(2n^2 - 1)x + (-1)^n 2n(n-1), \text{ falls } x \in [x_n, x_{n+1}).$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion f stetig und beschränkt ist, dass sie aber weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum hat.

(c) Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

(d) Weisen Sie nach, dass man f nicht so nach $[0,1]$ fortsetzen kann, dass die fortgesetzte Funktion ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.

(H 3)

Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge G von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen geschrieben werden kann.