Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 3.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

Probeklausur

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: __________

Vorname: __________

Matr.-Nr.: __________

Fachrichtung: __________

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	9	16	12	11	48	
err. Punktzahl						

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Ungleichung $4n \leq 3^n - 12$ gilt.

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie eine wahre Aussage mit „w" bzw. eine falsche mit „f". Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Eine nicht beantwortete Aussage wird mit 0 Punkten bewertet. Das Gesamtergebnis dieser Aufgabe ist mindestens 0 Punkte. Die Antworten in dieser Aufgabe müssen nicht begründet werden.

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen.

- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow (a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert
- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert
- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_{2n}$ konvergiert

- ☐ $\sum_{n=1}^\infty a_{\varphi(n)}$ konvergiert für jede streng monoton wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert

(c) Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschränkte Mengen.

- ☐ $\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\}$ ist beschränkt
- ☐ $\{\frac{1}{x} : x > 0\}$ ist beschränkt
- ☐ $(\exists \varepsilon > 0 \, \forall y \in Y : \; y \geq \varepsilon) \Rightarrow \sup\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot (\inf Y)^{-1}$
- ☐ $(\exists \varepsilon > 0 \, \forall y \in Y : \; y \geq \varepsilon) \Rightarrow \sup\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot (\sup Y)^{-1}$

(d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ☐ $\exists C, \alpha > 0 \, \forall x, y \in (a, b) : \; |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \Rightarrow f$ ist stetig
- ☐ f ist stetig $\Rightarrow \exists C > 0 \, \forall x, y \in (a, b) : \; |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$
- ☐ f ist monoton wachsend $\Rightarrow f$ ist stetig
- ☐ Es gibt eine Konstante $M > 0$ so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist stetig

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen und Reihen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \sqrt{n^2 + 7n + 5} - n$

(b) $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} 2^n x^{2n}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Außerdem seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und es gelte $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

Zeigen Sie: f besitzt mindestens einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

Hinweis: Betrachten Sie $z := \sup\{y \in [a, b] : \; y \leq f(y)\}$.

Orientierungskolloquium

Montag, 10.12.2007 – 16:15-17:45 Uhr – S103/123

Prof. Dr. Regina Bruder

AG Didaktik

Was wissen wir über „guten"Mathematikunterricht? - Ergebnisse aus aktuellen Studien der FG Fachdidaktik